

## ダイレクト・デジタル・シンセサイザ (DDS) の出力スペクトルにおける 1 次位相切り捨てスプリアスの周波数および振幅予測方法

著者: Ken Gentile

### はじめに

最近のダイレクト・デジタル・シンセサイザ (DDS) は、通常、アキュムレータ出力に周期的な N ビット・デジタル・ランプを生成するために、アキュムレータとデジタル周波数チューニング・ワード (FTW) を採用しています (図 1 参照)。このデジタル・ランプは、式 1 に従って DDS の出力周波数 ( $f_o$ ) を決定します。ここで、 $f_s$  は DDS のサンプル・レート (システム・クロック周波数) です。

$$f_o = f_s \times \frac{FTW}{2^N} \quad (1)$$

所定の DDS に対し、FTW を構成するビット数 (N) は、FTW の最下位ビット (LSB) の値だけが変化した場合に生じ得る  $f_o$  の最小変化量を決定します。つまり、FTW における 1 LSB の変化は、DDS のチューニング分解能を決定します。例えば N=32 の DDS は、N=24 の DDS よりも細かいチューニング分解能を備え

ています。DDS の非常に細かいチューニング能力の実例を示すために AD9912 の場合を考えます。このデバイスは N=48 で、 $2^{48}$  分の 1 (281,474,976,710,656 分の 1) のチューニング分解能を備えています。実際、 $f_s = 1$  GHz の場合の AD9912 の周波数チューニング分解能は、約 3.6  $\mu$ Hz (0.0000036 Hz) です。

N ビットの FTW を使用する DDS の場合、図 1 をよく見ると、アキュムレータ出力におけるビット数 (N) と、角度/振幅変換ブロックへの入力におけるビット数 (P) の間に、明らかな相違があることが分かります。つまり、P は N 以下の値です。この相違が、DDS 出力スペクトルに位相切り捨てスプリアスを発生させます。

位相切り捨てスプリアスを予測するには、使用する DDS の P の値を知ることが不可欠です。このアプリケーション・ノートでは、特定の位相切り捨てスプリアス、特に、与えられた FTW に対する 1 次位相切り捨て (PPT) スプリアスの周波数と振幅を計算する方法を説明します。

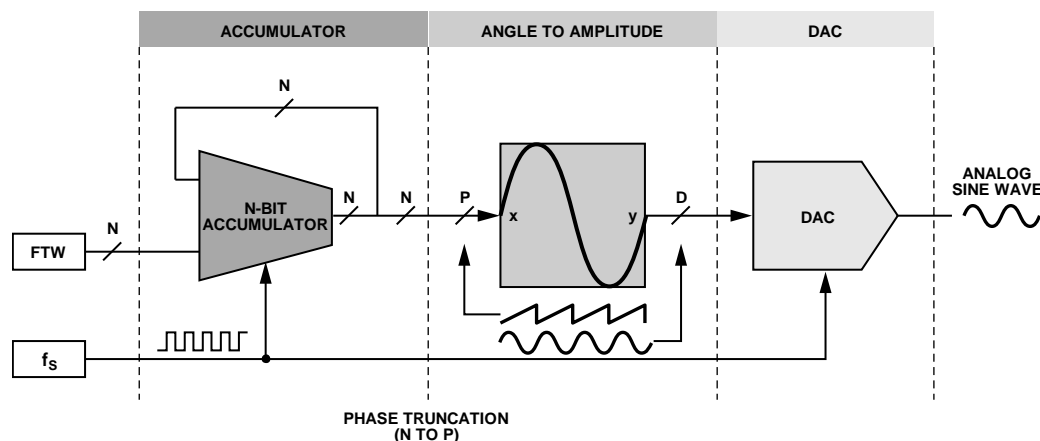


図 1. DDS のブロック図

14179-001

アナログ・デバイセズ社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイセズ社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。※日本語版資料は REVISION が古い場合があります。最新の内容については、英語版をご参照ください。

## 位相切り捨て

アキュムレータと FTW は DDS の周波数制御要素を形成します。しかし周波数制御要素に加えて、DDS には、N ビットのアキュムレータ出力を位相値から振幅値に変換する角度／振幅変換ブロックも含まれています。この角度／振幅変換ブロックは、DDS 内のデジタル回路のかかなりの部分を占めます。したがって、N を大きくすることによって DDS のチューニング分解能を改善すると、角度／振幅変換ブロックに必要な回路の数が大幅に増えます。このため、位相情報を示す N 個のビットすべてを振幅に変換することは実用的ではありません。その代わりに、図 1 に示すように、実際の DDS では位相から振幅への変換にアキュムレータ・ビットの一部を使用します。具体的には最上位側の P 個のビット (MSB) です。このようなビットの切り捨てを行うことにより、位相／振幅変換に必要な回路の数が大幅に減ります。しかし、これには、DDS 出力にスペクトル・アーチファクト (具体的には位相切り捨てによるスプリアス) が生じる恐れがあるという代償が伴います。

## 位相切り捨てスプリアス

定義からすると、 $P=N$  で設計された DDS では位相切り捨ては行われません。したがって、その出力スペクトルに位相切り捨てスプリアスは生じません。しかし実際の DDS では  $P < N$  であり、位相切り捨てが行われることを示しています。

位相切り捨てスプリアスには、1 次、2 次、3 次という 3 つのカテゴリがあります。これらのカテゴリは、DDS 内の位相／振幅コンバータと D/A コンバータ (DAC) をカスケード型に組み合わせた場合のスペクトル特性によって生じるものです。図 2 は、角度／振幅変換ブロック (P ビットの位相入力) と高調波歪みを伴う非理想 DAC に対し、フーリエ変換を行うことによって生じるスペクトル線をグラフで表した図です。一般に、スペクトルは 0 から  $2^P - 1$  にインデックスされる  $2^P$  個の周波数で構成され、表 1 に示すようにカテゴリ分類されます。

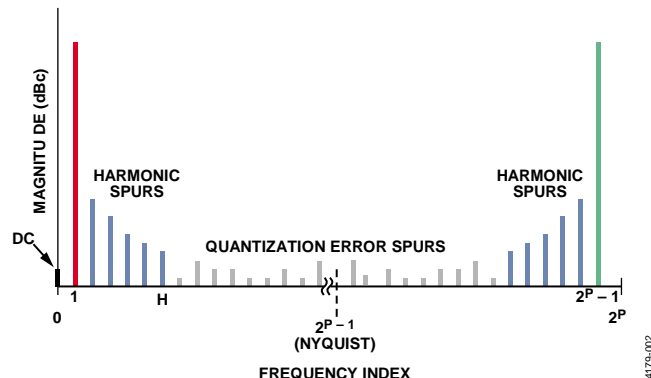


図 2. 角度／振幅変換ブロックと DAC のスペクトル特性

## 1 次位相切り捨て (PPT) スプリアス

FTW の特定の値に応じて、DDS の出力スペクトルには、各次数 (1 次、2 次、3 次) の位相切り捨てスプリアスが数多く発生する可能性があります。このアプリケーション・ノートでは、最大の 1 次スプリアスである PPT スプリアスに焦点を当てます。

DDS 出力は位相サンプルから波形を生成した結果得られるものなので (つまりアキュムレータ出力)、DDS の出力スプリアスはナイキスト・サンプリング理論に従います。出力スペクトルは 2 つの同じスペクトルとして現われ、それぞれが、サンプリング周波数 ( $f_s$ ) の 1/2 の周波数範囲に及びます。これら 2 つのスペクトルは、ナイキスト周波数 ( $f_s/2$ ) に対して互いに対称です。つまり、PPT スプリアスは 2 つのスプリアスとして現われます。1 つの PPT スプリアスは 0 Hz と  $f_s/2$  の間に、もう 1 つは  $f_s/2$  と  $f_s$  の間に現われます。

これら 2 つの PPT スプリアスが最大の 1 次位相切り捨てスプリアスですが、これらのスプリアスが必ずしも全体で最も大きい位相切り捨てスプリアスというわけではありません。位相切り捨てスプリアスが DDS 出力スペクトル内に分布するというメカニズムのために、2 次位相切り捨てスプリアスの方が PPT スプリアスより振幅が大きくなる場合があります。

2 次または 3 次の位相切り捨てスプリアスの振幅を予測することはできません。2 次位相切り捨てスプリアスの振幅は DAC の高調波歪み特性に依存し、デバイスごとに異なります。3 次位相切り捨てスプリアスの振幅は量子化誤差に関係し、その特性は基本的にランダムです。

表 1. 図 2 における周波数カテゴリ

Index	Color	Frequency Category
0	Black	DC。
1	Red	基本周波数またはフーリエ周波数。
$2^P - 1$	Green	1 次位相切り捨てスプリアス (基本周波数のナイキスト・イメージ)。
2 to H, $2^P - H$ to $2^P - 2$	Blue	2 次位相切り捨てスプリアス。インデックスの最初のグループが DAC 高調波スプリアスを構成し、インデックスの 2 つめのグループがそのイメージを構成。
H + 1 to $2^P - H - 1$	Gray	3 次位相切り捨てスプリアス。これらのスプリアスは、角度／振幅コンバータと DAC に関係する量子化スプリアス (およびそのイメージ) を構成。

右端の非ゼロ・ビット

PPT スプリアスの振幅と周波数位置を計算するには、以下を知る必要があります。

- DDS のサンプル・レート (fs)
- 2つの DDS パラメータ、N と P
- FTW の特定値

アプリケーションによっては N と P が固定されており、一般に fs は一定の値です。逆に FTW はあらゆる値を取ることができ、式 1 に詳細を示すように fo の値を制御します。FTW の値は DDS 出力スペクトル内における fo の位置だけでなく、位相切り捨てスプリアスの位置も制御します。実際、所定の FTW の DDS 出力スペクトルに関わる最も重要な特性は、2 進数で表す際の末尾側に付くゼロの個数です。末尾側ゼロの個数は、FTW の右端の非ゼロビットの位置を表す重要パラメータ L を決定します。

FTW におけるビット L の位置は、FTW の特定値によって異なります (FTW の値は、式 1 に示すように必要な DDS 出力周波数によって変わる点に注意してください)。所定の FTW におけるビット L の位置は DDS 出力スペクトル内における位相切り捨てスプリアスの分布状態を決定するので、この依存関係は重要です。

所定の FTW について L の値を求める方法を図 3 に示します。まず、FTW を 2 進数に変換します。次に、MSB の開始インデックス値を 1 にして、FTW ビットにインデックス値を割り当てます。図 3 は 32 ビット FTW の例です。したがって、インデックスの範囲は 1 ~ 32 です。L の値は、値が 1 の最終ビットのインデックスです (MSB から LSB の方向へ読み出した値)。図 3 における FTW の値は 0x0036e580 (16 進数) なので、このプロトコルを使用すると、この FTW における L の値は 25 です。

どの FTW においても L の値が最も重要です。第 1 に、L は、DDS 出力スペクトルに位相切り捨てスプリアスが生じるかどうかを決定します。L ≤ P の場合は、位相切り捨てスプリアスは生じません。しかし L > P の場合は、PPT スプリアスを含む位相切り捨てスプリアスが DDS 出力スペクトルに生じます。第 2 に、L と P の値は、PPT スプリアスの振幅と周波数を決定します (L > P と仮定)。

PPT 振幅

2つの PPT スプリアスの振幅は同じです (式 2 参照)。特定の FTW の値と所定の DDS 設計に対する P の値が与えられれば、2つの PPT スプリアスの振幅は次式で得られます。

$$PPT \text{ Magnitude} = 20 \times \log_{10} \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(2^P - 1)}{2^L}\right)} \right| \quad (2)$$

ここで、PPT 振幅の値の単位は dBc、つまり周波数 fo におけるメイン DDS 出力信号の振幅を基準としたデシベル値です。

式 2 における 2つの正弦関数の引数の単位はラジアンです。例えば、P = 19 の DDS と図 3 の FTW が与えられた場合、式 2 を使用した PPT スプリアスの振幅は -114.38789 dBc になります。

PPT 周波数

2つの PPT 周波数を決定するには、複数のステップで構成されるプロセスが必要です。まず、K、つまり、L ビットに切り詰められた FTW の 10 進値を求めます。2 進数で FTW が与えられている時に K の値を求めるには、末尾部分の 0 をすべて削除して、得られた L ビットの FTW をこれに相当する 10 進数に変換します。例えば図 3 の FTW では、K = 28,107 です (2 進数 000000000110110111001011 を 10 進数に変換した値)。

K を使い、式 3 と式 4 によって 2つの PPT スプリアスのスペクトル・インデックスの位置 (R1 と R2) を計算します。

$$R1 = (K \times (2^P - 1)) \text{ modulo } 2^L \quad (3)$$

$$R2 = (K \times (2^L - 2^P + 1)) \text{ modulo } 2^L \quad (4)$$

例えば DDS が P = 19 で FTW が図 3 のとおりだとすると、式 3 のカッコ内の値は 14,736,134,709 で、式 4 のカッコ内の値は 928,378,285,515 です。これらの値に 2<sup>25</sup> のモジュロ演算を行うと次の値が得られます。

$$R1 = 5,739,061$$

$$R2 = 27,815,371$$

R1 と R2 を使い、式 5 と式 6 に従って DDS 出力スペクトル内の 2つの PPT 周波数位置 (fPPT1 と fPPT2) を決定します。

$$f_{PPT1} = f_s \times \frac{R1}{2^L} \quad (5)$$

$$f_{PPT2} = f_s \times \frac{R2}{2^L} \quad (6)$$

例えば、fs = 250 MHz、FTW が図 3 に示すとおりで、R1 と R2 が前の例で計算した値だとすると、2つの PPT スプリアス周波数は以下ようになります。

$$f_{PPT1} = 42.759336531162261962890625 \text{ MHz}$$

$$f_{PPT2} = 207.240663468837738037109375 \text{ MHz}$$

	MSB -----> L																								LSB							
INDEX	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
FTW	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
HEX	0				0				3				6				e				5				8				0			

図 3. FTW のビット L

## 結論

このアプリケーション・ノートでは、2つの PPT スプリアス周波数とその振幅を予測するための比較的簡単な方法を説明していますが、式3と式4では計算時に問題が生じる可能性があります。特に、カッコ内の数値は整数として定義されますが、非常に大きな値になり得ます。

これらの計算において大きな整数値がもたらす問題を示すために、 $N=48$ 、 $P=19$ である AD9912 の場合を考えてみます。FTW を  $0x400000000001$  (16進数) とすると、これは  $70,368,744,177,665$  (10進数) に相当します。この場合  $L=48$  なので、 $K$  は FTW と同じ値になります。

ここで、式4のカッコ内の数値を考えます。 $2^L - 2^P + 1$  の項の値は次のようになります。

$$2^{48} - 2^{19} + 1 = 281,474,976,186,369$$

したがって、式4のカッコ内の値は次のようになります。

$$\begin{aligned} K \times (2^L - 2^P + 1) = \\ 70,368,744,177,665 \times 281,474,976,186,369 = \\ 19,807,040,591,672,948,094,687,248,385 \end{aligned}$$

この整数を2進数で表すには94ビット必要です。このようなサイズの整数を正確に表すことのできる計算ソフトウェア・ツールはほとんどありません。例えば、64ビット・マシン上で実行される MATLAB は、 $K \times (2^L - 2^P + 1)$  を浮動小数  $1.980704059167295 \times 10^{28}$  として表します。これに相当する整数は  $19,807,040,591,672,950,000,000,000,000$  です。この値は真の値と大きく異なるものであり、 $R_2$  として得られる結果は不正確な値となります。

実際、ほとんどのソフトウェア・ツールはこのように大きな整数を扱うことができませんが、それはコンピュータ内のプロセッサ・チップも同様です。例えば、64ビットのプロセッサを使用するコンピュータで94ビットの整数を扱うことはできません。 $R_1$  と  $R_2$  の値を計算するには、ほとんどのコンピュータの能力を超える非常に大きな整数計算が必要とされるので、この問題は非常に大きな懸念材料となります。

式3と式4のカッコ内の数値を正確に表すに加えて、カッコ内の数値の  $2^L$  のモジュラスを計算する必要もあります。上の例では  $L=48$  で、これは48ビットのモジュラスを意味します。ほとんどのコンピュータは、32ビットを超えるモジュラス計算を行うことができません。

要するに、式3と式4に伴う困難さは、ソフトウェア・ツールを使って PPT スプリアス計算を行うにあたって細心の注意を払う必要があるという点です。カッコ内の数値は(切り捨てや丸め込みを行うことなく)整数として正しく計算しなければならず、また、モジュラス計算も精度を損なうことなく正しく行う必要があります。

ほとんどのソフトウェア・ツールやプロセッサは非常に大きな整数を直接扱うことができませんが、例外があります。例えば、Python というソフトウェア・ツールは、非常に大きな整数の計算をネイティブでサポートしています。MATLAB® は非常に大きな整数をネイティブで扱うことができませんが、これらの整数の計算をサポートする可変精度整数 (Variable Precision Integer: VPI) ツールボックスを使用することができます。このツールボックスは、MathWorks のウェブサイトの MATLAB Central というページから無料でダウンロードできます。