

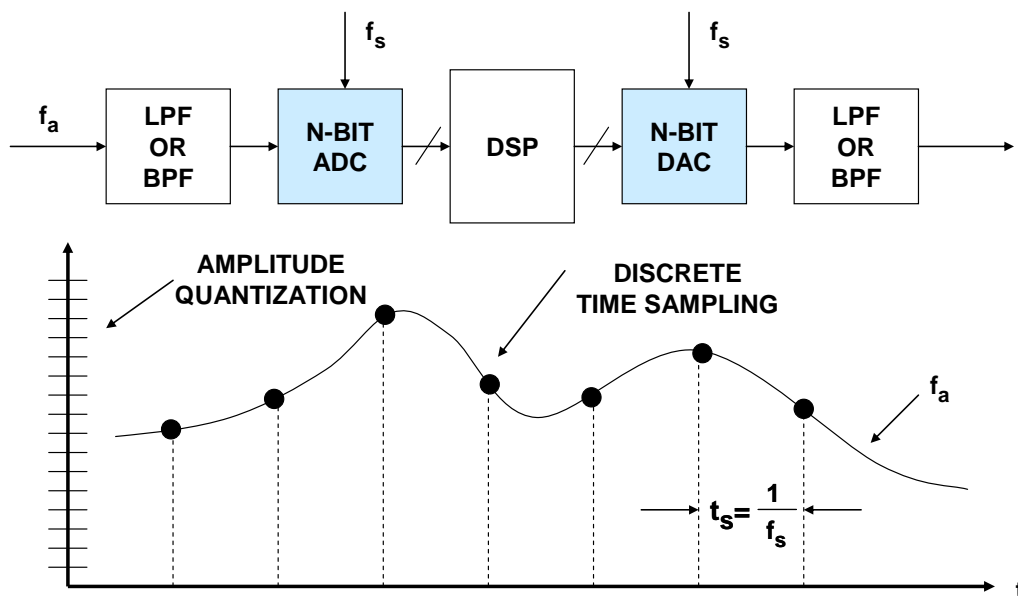
## 奈奎斯特准则对数据采样系统设计有何意义

作者: Walt Kester

### 简介

只是快速阅读Harry Nyquist于1924年发表的《贝尔系统技术杂志》经典文章(参考文献1),并不足以了解以其名字命名的该项准则的真正意义。当时, Nyquist正致力于研究通过带宽受限的通道传输电报信号。处理数据采样系统时, 必须详细了解现代对奈奎斯特准则的全新诠释。本指南将以通俗易懂的方式介绍奈奎斯特准则如何运用于基带采样、欠采样和过采样应用。

图1所示为典型的实时数据采样系统框图。实际进行模数转换之前, 模拟信号通常会通过某种放大、衰减和滤波等功能的信号调理电路。而要消除目标带宽之外的干扰信号并防止出现混叠, 则需要低通/带通滤波器。



**图1: 典型的数据采样系统**

图1所示的系统是实时系统, 即该系统 $f_s$ 的速率对输入ADC的信号进行连续采样, 而ADC同样以此速率将新样本提供给DSP。为了维持实时操作, DSP必须在采样间隔( $1/f_s$ )内完成所有必要计算, 并在ADC的下一样本到达之前向DAC提供输出样本。数字滤波器就是一个典型的DSP功能示例。

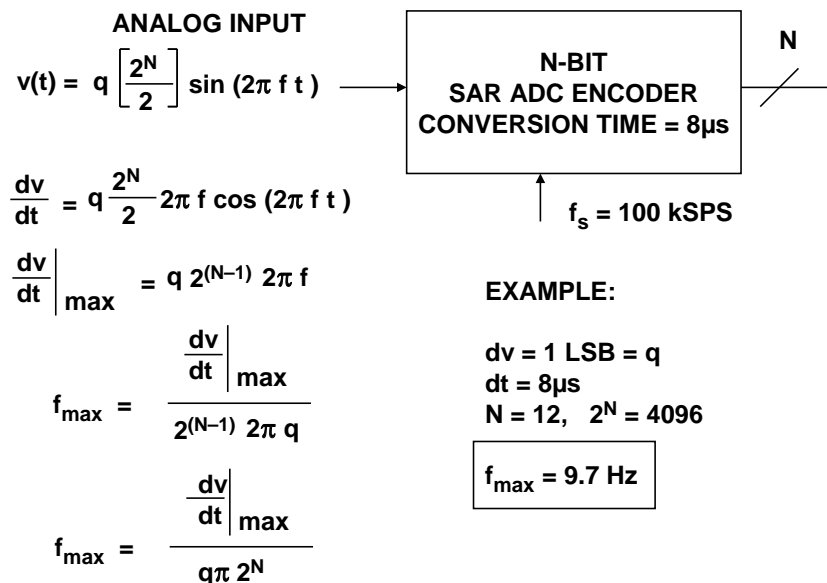
注意，只有DSP数据必须再次转换成模拟信号(例如，在语音频带或音频应用中)时，才需要DAC。在很多应用中，初始模数转换之后，信号仍旧全部以数字格式存在。类似地，在一些应用中，DSP仅负责产生DAC的输入信号。如果使用了DAC，则其后必须紧跟模拟抗镜像滤波器来消除镜像频率。最后，在一些速度较慢的工业过程控制系统中，采样速率要慢很多。无论何种系统，采样理论的基础知识都仍旧适用。

实际的模数和数模转换过程涉及到两个关键概念：离散时间采样和量化所致有限幅度分辨率。本指南将讨论离散时间采样。

### 采样保持放大器(SHA)功能作用

正如图1所示的一般的数据采样系统是假定输入端为某种类型的交流信号。应注意，这不是一项硬性要求（例如，针对直流测量优化的现代数字电压表(DVM)或ADC），但本次讨论假定输入信号具有一定的频率上限 $f_a$ 。

当今大多数ADC都内置采样保持功能，因而能够处理交流信号。此类ADC称为“采样ADC”。不过，很多早期ADC(如ADI公司的行业标准AD574)并不属于这种采样类型，而只是如图2所示的编码器。如果转换时间(如8 μs)内SAR ADC(假定不具有SHA功能)的输入信号变化超过1 LSB，输出数据将出现较大误差，具体取决于代码位置。可能除具有相配比较器的flash转换器之外，大多数ADC架构或多或少都受到这类误差影响。



**图2：非采样ADC(编码器)的输入频率限制**

假定编码器的输入信号是具有满量程幅度( $q2^N/2$ )的正弦波, 其中 $q$ 是1 LSB的权重。

$$v(t) = q \frac{2^N}{2} \sin(2\pi ft). \quad \text{等式1}$$

通过求导可以得到:

$$\frac{dv}{dt} = 2\pi fq \frac{2^N}{2} \cos(2\pi ft). \quad \text{等式2}$$

因此, 最大变化率为:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{\max} = 2\pi fq \frac{2^N}{2}. \quad \text{等式3}$$

求解 $f$ :

$$f = \frac{\left. \frac{dv}{dt} \right|_{\max}}{q\pi 2^N}. \quad \text{等式4}$$

如果 $N = 12$ , 且转换时间( $dt = 8 \mu\text{s}$ )内允许出现1 LSB的变化, 那么该等式可求解 $f_{\max}$ , 即不出现误差的情况下可处理的最大满量程信号频率:

$$f_{\max} = 9.7 \text{ Hz}.$$

这表示, 即使 $8 \mu\text{s}$  ADC支持100 kSPS采样频率(这样就额外多出 $2 \mu\text{s}$ 时间来让外部SHA在退出保持模式后重新获取信号), 但一旦输入频率超过9.7 Hz, 仍会出现转换误差。

为了处理交流信号, 需要增加采样保持(SHA)功能, 如图3所示。理想的SHA是一个简单的开关, 用于驱动保持电容及其后的高输入阻抗缓冲器。缓冲器的输入阻抗必须足够高, 以便电容可以在保持时间内放电少于1 LSB。SHA在采样模式中对信号进行采样, 而在保持模式期间则保持信号恒定。同时调整时序, 以便编码器可以在保持时间内执行转换。因此, 采样ADC可以处理快速信号, 且频率上限取决于SHA孔径抖动、带宽和失真等, 而非编码器。在给出的示例中, 采样保持功能在 $2 \mu\text{s}$ 内进行信号采集, 而编码器则在 $8 \mu\text{s}$ 内进行信号转换, 因而采样周期总计 $10 \mu\text{s}$ 。这样, 采样频率就等于100 kSPS, 并且最高能够处理50 kHz的输入频率。

了解真正的采样保持放大器(SHA)和跟踪保持放大器(T/H或THA)之间的细微差异非常重要。严格来说,并不会在采样模式期间定义采样保持功能的输出,但跟踪保持功能的输出会在采样或跟踪模式期间跟踪信号。在实际操作中,该功能一般配置为跟踪保持,且“跟踪保持”和“采样保持”术语通常可以互换使用。图3所示的波形就是与跟踪保持功能相关的那些波形。

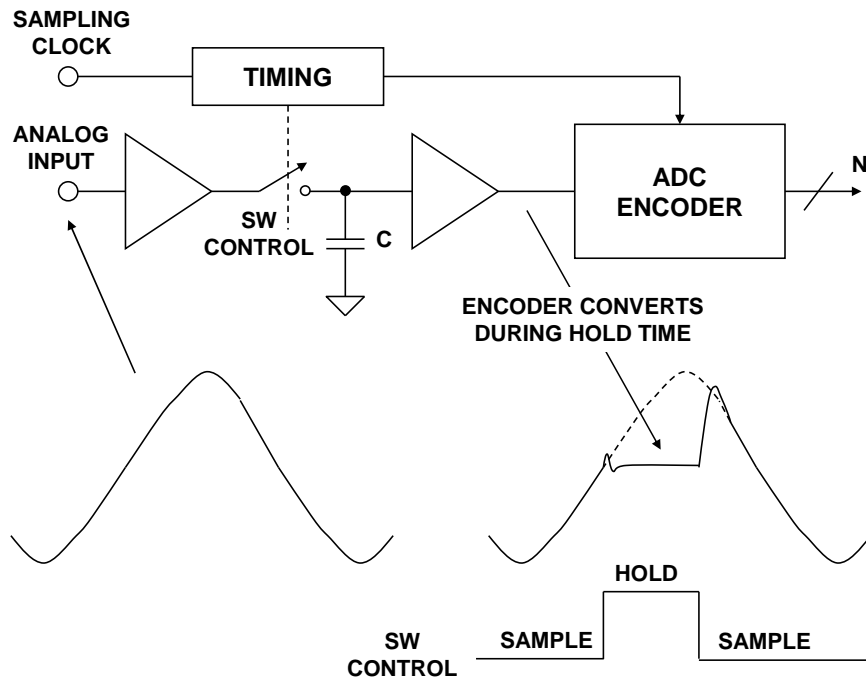


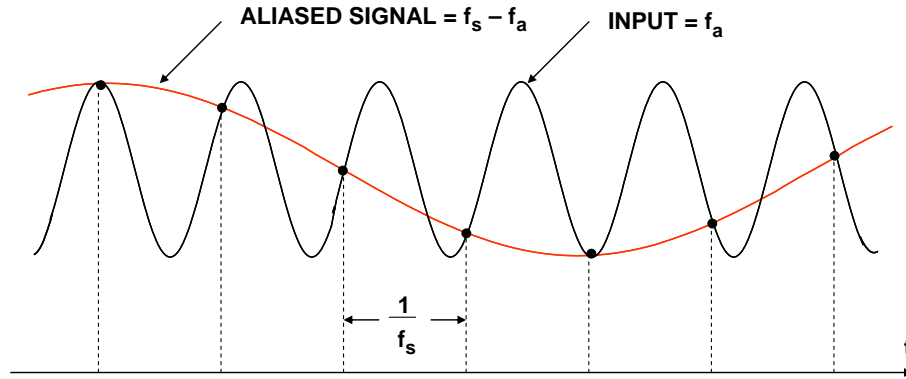
图3: 对交流信号进行数字化处理所需的采样保持功能

### 奈奎斯特准则

连续模拟信号以离散的时间间隔 $t_s = 1/f_s$ 采样,该时间间隔必须精心选择,确保采样数据能精确描述原始模拟信号。很显然,采样越多(采样速率越快),模拟信号的数字表示就越精确。如果采样较少(采样速率较慢),则少到某一点时,模拟信号的关键信息将因得不到采样而丢失。在贝尔电话实验室工作期间,Harry Nyquist分别于1924和1928年发表了两篇经典论文,奠定了采样的数学基础。(请参见参考文献1和2,以及参考文献6的第2章。)之后不久,R. V. L. Hartley对Nyquist的原始工作进行了补充(参考文献3)。这些论文构成了上世纪40年代PCM工作的基础,而后在1948年Claude Shannon撰写了其在通信理论方面的经典论文(参考文献4)。

简而言之,奈奎斯特准则要求采样频率至少是信号所含最高频率的两倍,否则信号所承载的信息将会丢失。如果采样频率小于最大模拟信号频率的两倍,将会出现一种称为“混叠”的现象。

为了理解混叠对时域和频域的影响，首先请考虑图4所示采样单音正弦波的时域表示情况。在此示例中，采样频率 $f_s$ 并未达到至少 $2f_a$ ，而仅仅是略大于模拟输入频率 $f_a$ ，因而违背了奈奎斯特准则。注意，实际样本的图案产生了较低频率( $f_s - f_a$ )的混叠正弦波。



NOTE:  $f_a$  IS SLIGHTLY LESS THAN  $f_s$

图4: 时域中的混叠现象

这种情况的对应频域表示如图5B所示。现在考虑采用理想的脉冲采样器以 $f_s$ 的频率对频率为 $f_a$ 的单频正弦波进行采样(见图5A)。另外假定 $f_s > 2f_a$ ，如图所示。采样器的频域输出显示每数个 $f_s$ 附近均会出现原始信号的混叠或镜像，具体位于 $|\pm Kf_s \pm f_a|$ ， $K = 1, 2, 3, 4, \dots$

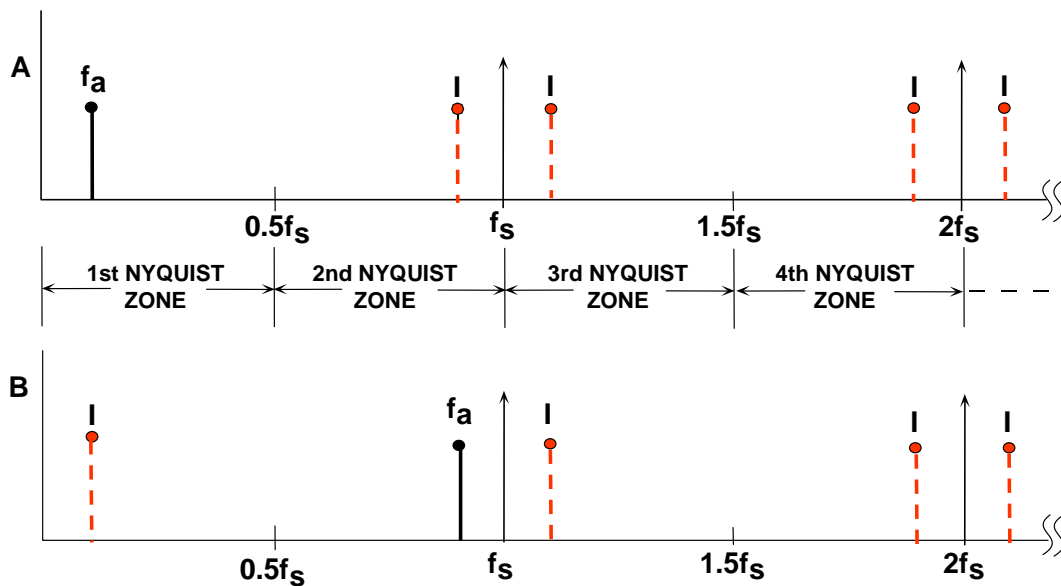


图5: 使用理想采样器以 $f_s$ 频率进行采样时模拟信号 $f_a$ 具有镜像(混叠)，具体位于 $|\pm Kf_s \pm f_a|$ ， $K = 1, 2, 3, \dots$

奈奎斯特带宽定义为从DC到 $f_s/2$ 的频谱。该频谱可细分为无数奈奎斯特区，每个宽度等于 $0.5f_s$ ，如图所示。在实际操作中，理想采样器可以替换为后接FFT处理器的ADC。FFT处理器仅提供DC到 $f_s/2$ 范围内的输出，即第一奈奎斯特区出现的信号或混叠。

接下来，我们考虑第一奈奎斯特区之外的信号情况(图5B)。信号频率仅仅略小于采样频率，对应图4中时域表示所示的条件。注意，即使信号位于第一奈奎斯特区之外，其镜像(或混叠) $f_s - f_a$ 仍位于该区内。现在回到图5A。很明显，如果任何镜像频率 $f_a$ 处出现干扰信号，那么也将会出现在 $f_a$ 处，因而会在第一奈奎斯特区内产生杂散频率成分。

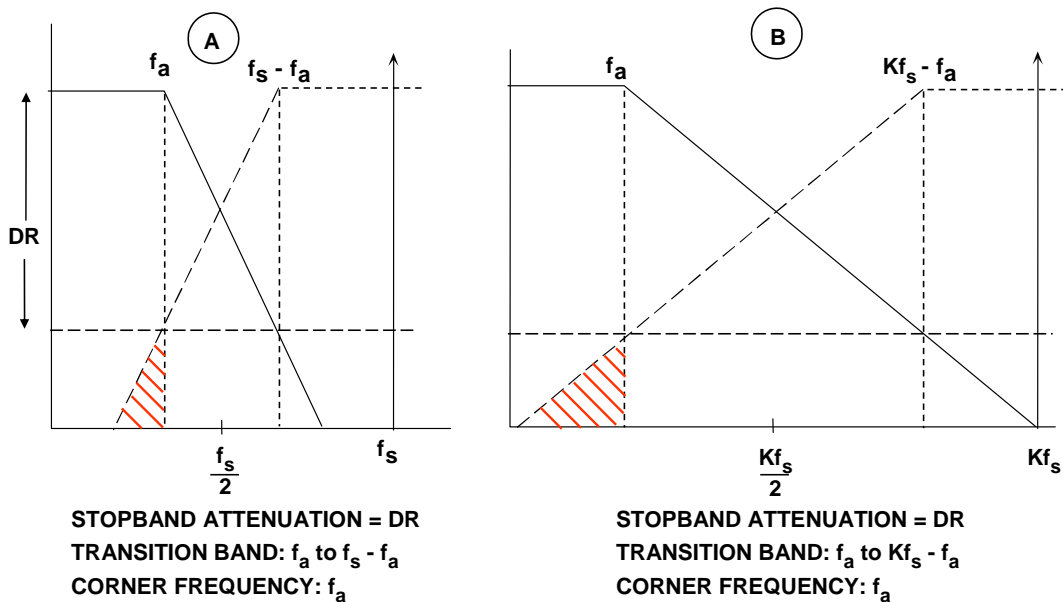
这类似于模拟混频过程，同时意味着需要在采样器(或ADC)之前放置一些滤波器件来消除位于奈奎斯特带宽之外但其混叠成分又位于该范围之内的频率成分。滤波器性能将取决于带外信号与 $f_s/2$ 的接近程度和所需的衰减量。

### 基带抗混叠滤波器

基带采样意味着要采样的信号位于第一奈奎斯特区之内。需要注意的是，当理想采样器的输入端没有输入滤波时，任意奈奎斯特区内奈奎斯特带宽之外的任意频率成分(信号或噪声)都将混叠回到第一奈奎斯特区。为此，几乎所有采样ADC应用中都会使用抗混叠滤波器来消除这些干扰信号。

合理指定抗混叠滤波器是非常重要的。第一步是了解待采样信号的特性。假定最高目标频率为 $f_a$ 。抗混叠滤波器任由DC至 $f_a$ 范围内的信号通过，同时对 $f_a$ 以上的信号进行衰减。

假定所选滤波器的转折频率等于 $f_a$ 。系统动态范围内从最小衰减到最大衰减的有限跃迁效应如图6A所示。



**图6：过采样降低对基带抗混叠滤波器的要求**

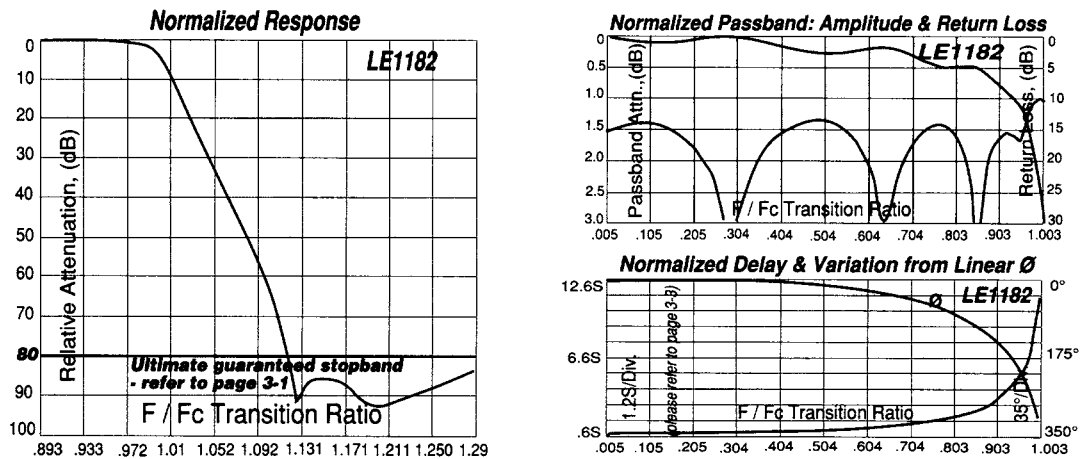
假定输入信号具有超过最大目标频率 $f_a$ 的满量程成分。该图显示了 $f_s - f_a$ 以上的满量程频率成分如何混叠回到DC至 $f_a$ 的带宽范围内。这些混叠成分不易与实际信号区分开来，因此将动态范围限制为图中显示为DR的值。

有些文章推荐根据奈奎斯特频率 $f_s/2$ 来指定抗混叠滤波器，但这时假定目标信号带宽为DC至 $f_s/2$ ，而那种情况非常少见。在图6A的示例中， $f_a$ 和 $f_s/2$ 之间的混叠成分并不是目标成分，因此不会限制动态范围。

因此，抗混叠滤波器的过渡带取决于转折频率 $f_a$ 、阻带频率 $f_s - f_a$ 和所需阻带衰减DR。所需系统动态范围的选择依据是信号保真度要求。

所有其它条件不变时，过渡带越陡，滤波器就越复杂。例如，与所有其他滤波器一样，巴特沃兹滤波器针对每个滤波器极点提供每倍频程6 dB衰减。要在1 MHz到2 MHz的过渡区(1倍频程)内实现60 dB衰减，需要至少10个极点。这样的滤波器可不是随随便便能实现的，绝对是一项设计挑战。

因此，其它滤波器类型通常更适用于对陡峭过渡带、带内平坦度以及线性相位响应有要求的应用。椭圆滤波器满足这些标准，是一种颇受欢迎的选择。有一些公司专门提供定制模拟滤波器。TTE就属于这类公司(参考文献5)。例如，TTE公司11极点椭圆抗混叠滤波器LE1182的归一化响应如图7所示。注意，此滤波器专用于在 $f_c$ 和 $1.2f_c$ 之间实现至少80 dB衰减。图7还显示了相应的通带纹波、回损、延迟和相位响应。



Reprinted with Permission of TTE, Inc.,  
11652 Olympic Blvd., Los Angeles CA 90064  
<http://www.tte.com>

图7: 11极点椭圆滤波器(TTE公司LE1182系列)的特性

从上述讨论中, 我们可以看到如何对抗混叠过渡带的锐度与ADC采样频率作出权衡。选择较高的采样速率(过采样)时, 过渡带的锐度要求有所降低(因而滤波器复杂程度也相应降低), 但是需要使用更快的ADC, 并且需要以更快的速率来处理数据。图6B显示了保持模拟转折频率 $f_a$ 和动态范围DR要求不变但采样频率调高K倍时所产生的影响。对于图6A中的情况, 过渡带( $f_a$ 至 $Kf_s - f_a$ )越宽, 那么此过滤器设计就越简单。

抗混叠滤波器设计过程从选择大小等于2.5到4倍 $f_a$ 的初始采样速率开始。接着, 根据所需动态范围确定滤波器规格并判断是否可在系统成本和性能限制范围内实现该滤波器。如果无法实现, 则考虑使用较高的采样速率, 而这可能要求使用更快的ADC。值得一提的是,  $\Sigma$ - $\Delta$ 型ADC本质上属于高过采样转换器, 因此此架构又添一项优势, 那就是可以降低对模拟抗混叠滤波器的要求。

如果确定永远不会出现阻带频率 $f_s - f_a$ 的满量程信号, 也可降低对抗混叠滤波器的要求。很多应用中都不太可能会出现此频率的满量程信号。如果 $f_s - f_a$ 频率的最大信号永远不会超过满量程以下X dB, 那么滤波器阻带衰减要求也会出现同幅下降。基于对信号的这种了解,  $f_s - f_a$ 处的新阻带衰减要求现在仅为 $DR - X$  dB。作出此类假定时, 注意要将可能超过最大信号频率 $f_a$ 的任何噪声信号视作也会叠加回到信号带宽内的干扰信号。



### 欠采样(谐波采样、带通采样、中频采样、直接中频数字转换)

到目前为止，我们考虑的是基带采样情况，即所有目标信号均位于第一奈奎斯特区内。图8A显示了另外一种情况，其中采样信号频带局限于第一奈奎斯特区，而原始频带镜像出现在其它每个奈奎斯特区。

以图8B所示的情况为例，其中采样信号频带完全位于第二奈奎斯特区内。对第一奈奎斯特区之外的信号进行采样的过程通常称为“欠采样”或“谐波采样”。注意，第一奈奎斯特区内的镜像包含原始信号中的所有信息，但其原始位置除外(频谱内频率成分的顺序是相反的，但这点可轻松地通过重新调整FFT输出的顺序来加以纠正)。

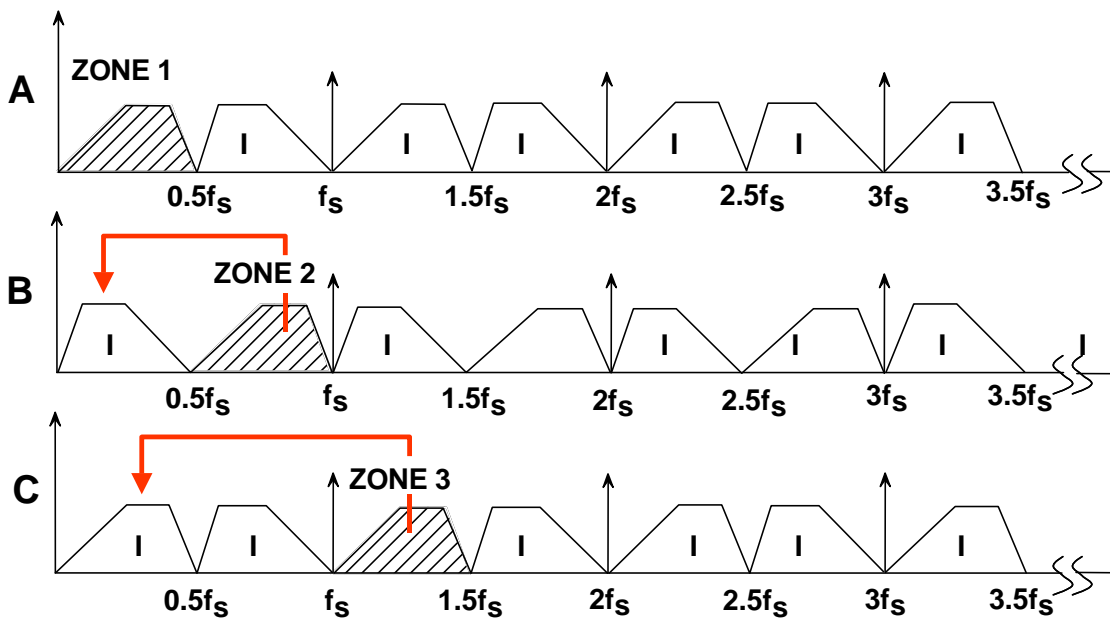


图8：欠采样和奈奎斯特区之间的频率转换

图8C显示了限制至第三奈奎斯特区的采样信号。注意，第一奈奎斯特区内的镜像并未频谱反转。实际上，采样信号频率可能位于任意独特的奈奎斯特区内，而第一奈奎斯特区内的镜像仍旧是精确表示(当信号位于编号为偶数的奈奎斯特区时出现的频谱反转除外)。此时，我们可以重提奈奎斯特准则，因为其适用于宽带信号：

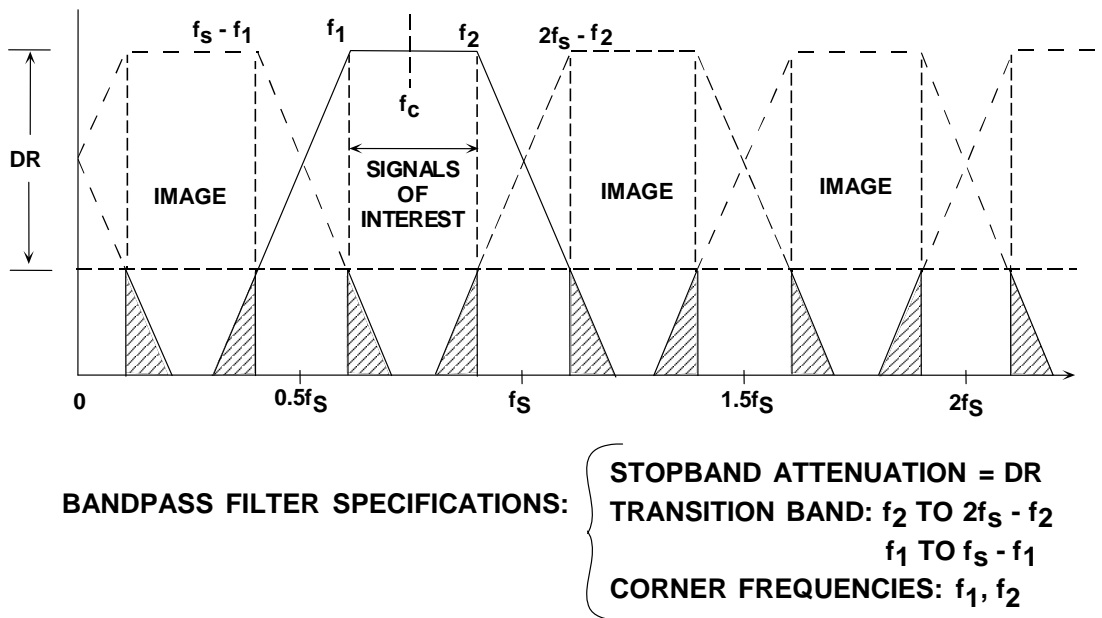
带宽为BW的信号必须以等于或大于其带宽两倍(2BW)的速率进行采样，方可保留信号中的全部信息。

注意，该处并没有提到采样信号频带相对于采样频率在频谱内的绝对位置。唯一的限制是采样信号频带必须局限于单个奈奎斯特区，即信号不得重叠任意多个 $f_s/2$ (实际上，这就是抗混叠滤波器的主要功能)。

在通信应用中，对第一奈奎斯特区以上的信号进行采样等效于模拟解调，因此越来越受欢迎。直接对中频信号进行采样，然后使用数字技术来处理该信号，这种做法已经日渐普遍，从而不再需要中频解调器和滤波器。不过显然，IF频率越高，对ADC的动态性能要求就越严格。ADC输入带宽和失真性能必须足以处理IF频率，而不仅仅是基带。这就给仅设计用来处理第一奈奎斯特区内信号的大多数ADC带来了一项难题——适合欠采样应用的ADC必须高阶奈奎斯特区内保持动态性能不变。

**欠采样应用中的抗混叠滤波器**

图9显示了以载波频率 $f_c$ 为中心的第二奈奎斯特区内的信号，其中频率下限和上限分别为 $f_1$ 和 $f_2$ 。抗混叠滤波器是一个带通滤波器。所需动态范围为DR，该范围定义了滤波器阻带衰减。过渡带上限为 $f_2$ 至 $2f_s - f_2$ ，而下限则为 $f_1$ 至 $f_s - f_1$ 。对于基带采样，通过按比例调高采样频率可以降低对抗混叠滤波器的要求，但还必须改变 $f_c$ ，使其始终是第二奈奎斯特区的中心。



**图9：用于欠采样的抗混叠滤波器**

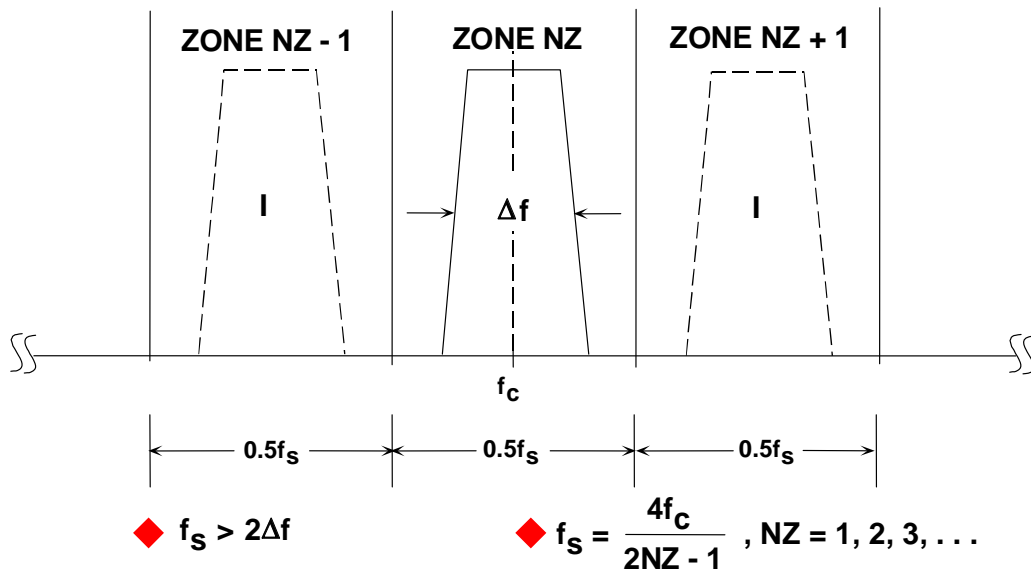
给定载波频率 $f_c$ 及其信号带宽 $\Delta f$ 时，可使用两个关键等式来选择采样频率 $f_s$ 。首先是奈奎斯特准则：

$$f_s > 2\Delta f. \quad \text{等式5}$$

第二个等式确保 $f_c$ 位于某个奈奎斯特区的中心：

$$f_s = \frac{f_c \cdot 4}{2NZ - 1}, \quad \text{等式6}$$

其中， $NZ = 1, 2, 3, 4, \dots$ ，且 $NZ$ 对应于载波及其信号所位于的奈奎斯特区(见图10)。



**图10：使欠采样信号位于某个奈奎斯特区中心**

一般而言， $NZ$ 越大越好，从而允许处理高IF频率。无论 $NZ$ 选择多少，奈奎斯特准则都要求 $f_s > 2\Delta f$ 。如果 $NZ$ 选择为奇数，那么 $f_c$ 及其信号将位于编号为奇数的奈奎斯特区内，而第一奈奎斯特区内的镜像频率不会反转。

举例来说，假定信号以载波频率71 MHz为中心且宽度为4 MHz。因此，最低采样频率要求为8 MSPS。通过将 $f_c = 71$  MHz和 $f_s = 8$  MSPS代入等式6来求解 $NZ$ ，可得到 $NZ = 18.25$ 。不过， $NZ$ 必须为整数，因此我们把18.25四舍五入为最接近的整数，即18。再次通过等式6来求解 $f_s$ ，可得到 $f_s = 8.1143$  MSPS。因此，最后的值为 $f_s = 8.1143$  MSPS、 $f_c = 71$  MHz、 $NZ = 18$ 。

现在假定我们需要抗混叠滤波器具有更多余量，因此将 $f_s$ 选择为10 MSPS。通过将 $f_c = 71$  MHz和 $f_s = 10$  MSPS代入等式6来求解NZ，可得到 $NZ = 14.7$ 。我们将14.7四舍五入为最接近的整数，即可得到 $NZ = 14$ 。再次通过等式6来求解 $f_s$ ，可得到 $f_s = 10.519$  MSPS。因此，最后的值为 $f_s = 10.519$  MSPS、 $f_c = 71$  MHz、 $NZ = 14$ 。

上述迭代过程也可通过从 $f_s$ 开始并调整载波频率来为NZ产生一个整数。

## 总结

本指南涵盖了奈奎斯特准则的基础知识和时域与频域的混叠影响。同时利用该准则的应用知识介绍了如何适当地指定抗混叠滤波器。文中介绍了与现代通信系统应用相关的过采样和欠采样示例。

## 参考文献：

1. H. Nyquist, "Certain Factors Affecting Telegraph Speed," *Bell System Technical Journal*, Vol. 3, April 1924, pp. 324-346.
2. H. Nyquist, Certain Topics in Telegraph Transmission Theory, *A.I.E.E. Transactions*, Vol. 47, April 1928, pp. 617-644.
3. R.V.L. Hartley, "Transmission of Information," *Bell System Technical Journal*, Vol. 7, July 1928, pp. 535-563.
4. C. E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication," *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, July 1948, pp. 379-423 and October 1948, pp. 623-656.
5. TTE, Inc., 11652 Olympic Blvd., Los Angeles, CA 90064, <http://www.tte.com>.
6. Walt Kester, [Analog-Digital Conversion](#), Analog Devices, 2004, ISBN 0-916550-27-3, Chapter 2. Also Available as [The Data Conversion Handbook](#), Elsevier/Newnes, 2005, ISBN 0-7506-7841-0, Chapter 2.

Copyright 2009, Analog Devices, Inc. All rights reserved. Analog Devices assumes no responsibility for customer product design or the use or application of customers' products or for any infringements of patents or rights of others which may result from Analog Devices assistance. All trademarks and logos are property of their respective holders. Information furnished by Analog Devices applications and development tools engineers is believed to be accurate and reliable, however no responsibility is assumed by Analog Devices regarding technical accuracy and topicality of the content provided in Analog Devices Tutorials.