

**「ナイキストの基準」を、現実の ADC システムの設計に活かす**

著者：WALT KESTER

**はじめに**

1924年、ベル研究所のハリー・ナイキスト (Harry Nyquist) は、『Bell System Technical Journal』に、1本の有名な記事を寄稿しました (参考文献 1)。ただ、それを一読するだけでは、同氏の名前を冠した「ナイキスト基準 (Nyquist Criterion)」が持つ真の重要性を理解することはできません。同氏は、帯域幅が制限されたチャネルを介した電信信号の伝送について取り組んでいました。サンプリング・データを扱うシステムを設計する際には、ナイキストの基準に対する“現代的な解釈”について十分に理解することが不可欠です。このチュートリアルでは、ベースバンド・サンプリング/アンダーサンプリング/オーバーサンプリングに、ナイキスト基準をどのように適用すべきなのかについてわかりやすく説明します。

図 1 に示したのは、アナログ信号をサンプリングしたデータを扱う典型的なリアルタイム・システムのブロック図です。通常、A/D 変換が行われる前に、アナログ信号は信号処理回路を通過し、その際に増幅、減衰、フィルタリングなどの処理が施されます。ローパス・フィルタやバンドパス・フィルタは、エイリアシング (折り返し) を防ぐために使われるものであり、帯域外の望ましくない周波数信号成分を除去する役割を果たします。

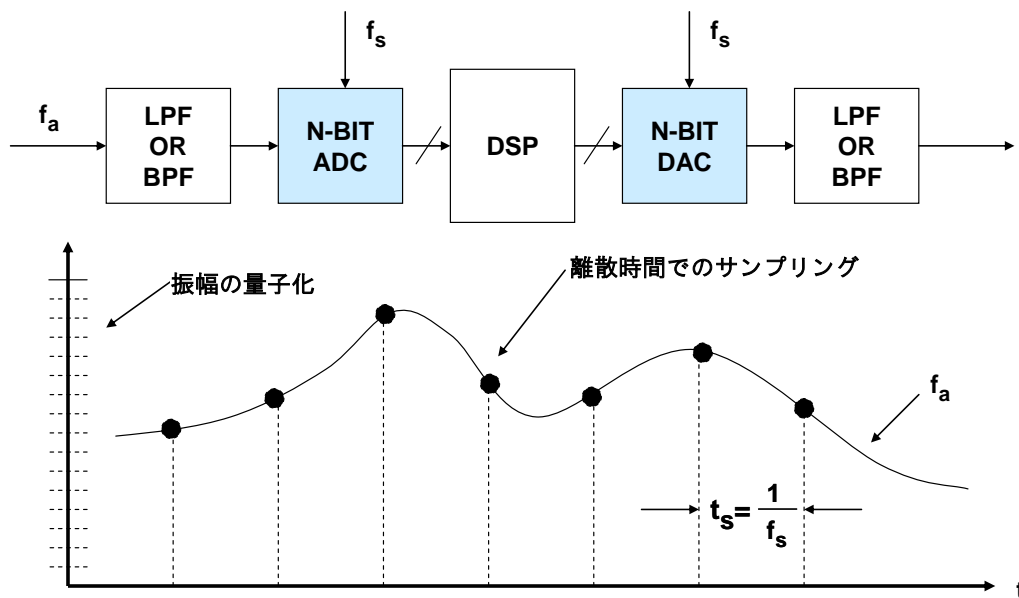


図 1. サンプリングしたデータを扱う典型的なシステム

アナログ・デバイセズ社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイセズ社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。※日本語版資料は REVISION が古い場合があります。最新の内容については、英語版をご参照ください。

図 1 のシステムはリアルタイム・システムです。A/D コンバータ (ADC) への入力信号は、 $f_s$  のサンプリング・レート (サンプリング周波数) で連続的にサンプリングされます。そして、ADC はこのレートで新しいサンプルデータ (サンプリングによって得られたデータ) を DSP に供給します。リアルタイム動作を維持するには、DSP は必要なすべての演算をサンプリング周期  $1/f_s$  の間に実行し、ADC から次のサンプルデータが届く前に、D/A コンバータ (DAC) に出力サンプルを引き渡す必要があります。DSP によって行われる典型的な機能としては、デジタル・フィルタが挙げられます。

ここで、DAC は、DSP からのデータをアナログ信号に変換し直さなければならない場合にだけ必要であることに注意してください。例えば、音声アプリケーションやオーディオ・アプリケーションなどの場合です。最初に A/D 変換を行ってデジタル信号を得た後は、最後までデジタル信号だけを扱うアプリケーションも数多く存在します。また、DAC に引き渡す信号を生成するためだけに DSP を使用するアプリケーションもあります。DAC を使用する場合、その後段にアンチエイジング用のアナログ・フィルタを配置し、イメージ信号 (折り返しにより発生するノイズ) を除去する必要があります。そのほかのアプリケーションとしては、かなり低いサンプリング・レートを使用し、低速で動作する産業用プロセス制御システムなどがあります。どのようなシステムであっても、サンプリング・データを扱うシステムにはサンプリング理論の基本が必ず当てはまります。

実際の A/D 変換のプロセスには、「離散時間でのサンプリング」と「振幅の量子化における有限の分解能」という 2 つの重要な概念が関与します。本稿では、前者の離散時間でのサンプリングについて説明します。

## サンプル&ホールド・アンプが必要な理由

図 1 に示したシステムは、何らかの AC 信号が入力されることを想定したものです。ただし、実際のアプリケーションは必ずしもこのとおりのものであるとは限りません。DC 電圧の測定用に最適化された最新のデジタル電圧計 (DVM) や ADC がその例です。ここでは、周波数の上限が  $f_a$  の AC 信号を入力として考えることにします。

今日のほとんどの ADC には、サンプル&ホールド機能を実現する SHA (サンプル&ホールド・アンプ) が組み込まれており、それを利用することで、入力である AC 信号を容易に処理できるようになっています。このタイプの ADC は、「サンプリング ADC」と呼ばれています。しかし、かつて数多く使われ、今でも使用されているアナログ・デバイセズ社の「AD574」など、古くから使われている多くの ADC は、サンプリング ADC ではなく、図 2 に示すような単なるエンコーダです。この例では、サンプル&ホールド機能を持たない SAR 型の ADC を使用しており、実際にひとつの変換にかかる時間 (変換時間) が  $8\mu\text{s}$  であるとし、この ADC への入力信号が  $8\mu\text{s}$  の間に 1LSB 以上変化すると、場合によっては出力データに大きな誤差が生じる恐れがあります。どのようなアーキテクチャを採用しているとしても、ほとんどの ADC ではこの種の誤差が生じる可能性があります。ただし、適切にマッチングするコンパレータを備えたフラッシュ型の ADC であれば、この種の誤差が生じることはないかもしれません。

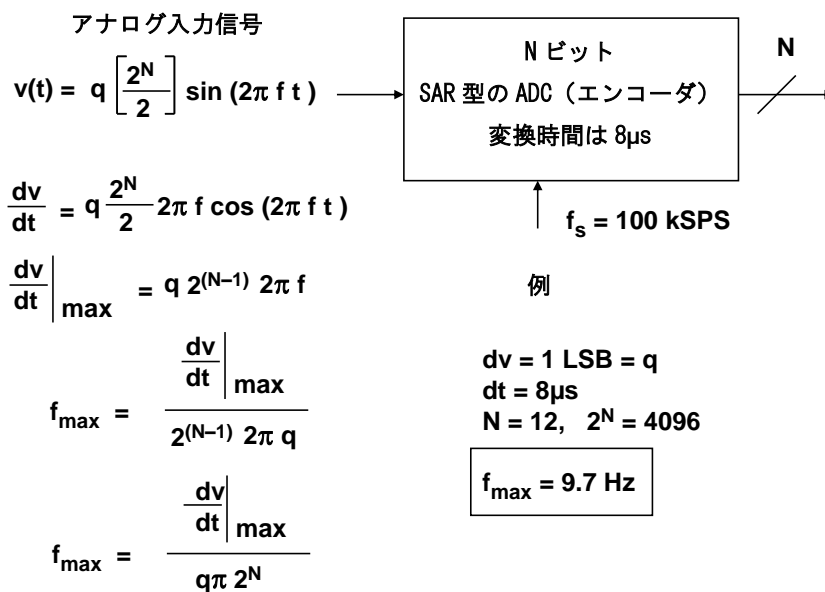


図 2. 非サンプリング ADC (エンコーダ) における入力信号周波数の制約

エンコーダへの入力信号が、以下の式 1 で表されるフルスケール振幅 ( $q2^N/2$ ) の正弦波であるとして (N は ADC の分解能、q は 1LSB の重み)。

$$v(t) = q \frac{2^N}{2} \sin(2\pi f t). \tag{式 1}$$

その導関数は次式のようにになります。

$$\frac{dv}{dt} = 2\pi f q \frac{2^N}{2} \cos(2\pi f t). \tag{式 2}$$

したがって、入力信号の最大変化率は次式のようにになります。

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{\max} = 2\pi f q \frac{2^N}{2}. \tag{式 3}$$

このときの周波数 f は次式のように求められます。

$$f = \frac{\left. \frac{dv}{dt} \right|_{\max}}{q\pi 2^N}. \tag{式 4}$$

ここで、分解能  $N=12$  で、変換時間 ( $dt=8 [\mu\text{s}]$ ) の間に  $1\text{LSB}$  の変化 ( $dv=q$ ) が許容されると仮定します。すると、誤差なく処理可能なフルスケールの信号の最大周波数  $f_{\text{max}}$  は、式 4 から  $9.7\text{Hz}$  となります。

$$f_{\text{max}} = 9.7 \text{ Hz.}$$

変換時間が  $8\mu\text{s}$  の ADC であれば  $100\text{kSPS}$  (キロサンプル/秒) のサンプリング・レートでも使用できますが (外付けの SHA がホールド・モードの終了後に信号を再取得するために時間としてさらに  $2\mu\text{s}$  の余裕があります)、入力周波数が  $9.7\text{Hz}$  よりも大きくなると、変換誤差が生じる可能性があるということです。

AC 信号を処理する場合には、図 3 に示すように SHA を追加します。理想的な SHA は、単純なスイッチにより、入力インピーダンスの高いバッファの入力についているホールド処理用のコンデンサを駆動するというものになります。バッファの入力インピーダンスは、ホールド時間の間に、コンデンサの放電動作による電位の変動が  $1\text{LSB}$  未満になるよう、十分に高くなければなりません。SHA はサンプル・モードで信号をサンプリングし、ホールド・モードでその信号を一定の状態に保持します。実際に使用する際には、スイッチの制御を行うタイミングを調整して、ホールド時間中にエンコーダが変換を完了できるようにします。サンプリング ADC では、このような仕組みを内蔵することによって高速信号の処理に対応しています。エンコーダの性能とは別に、SHA のアパーチャ・ジッタ、帯域幅、歪みなどによっても入力周波数の上限が決まります。ここで示した例では、SHA は  $2\mu\text{s}$  で信号を取得し、エンコーダは  $8\mu\text{s}$  で信号の変換を行うので、サンプリング時間は合計で  $10\mu\text{s}$  となります。つまり、サンプリング・レートは  $100\text{kSPS}$  となり、最大で  $50\text{kHz}$  までの入力信号を処理できるということになります。

ここで、トラック&ホールド・アンプ (THA または T/H と表記されます) にも触れておきましょう。真の意味での SHA と、THA との微妙な違いについても理解しておくべきです。厳密に言うと、SHA の場合、サンプル・モード中には出力は定義されません。一方、THA のサンプル・モード (トラック・モード) 出力は、入力信号に追従します。SHA といっても、実際にはその機能は THA によって実現されていることが多く、サンプル&ホールドとトラック&ホールドという語は同じ意味で使われます。図 3 に示しているのは、THA を使用している場合の波形です。

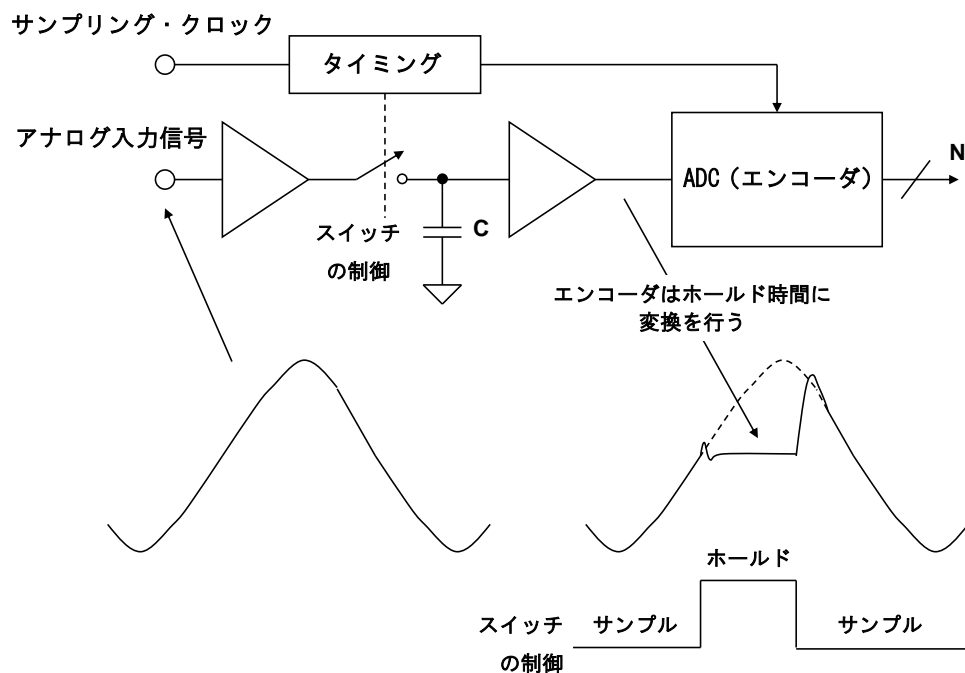


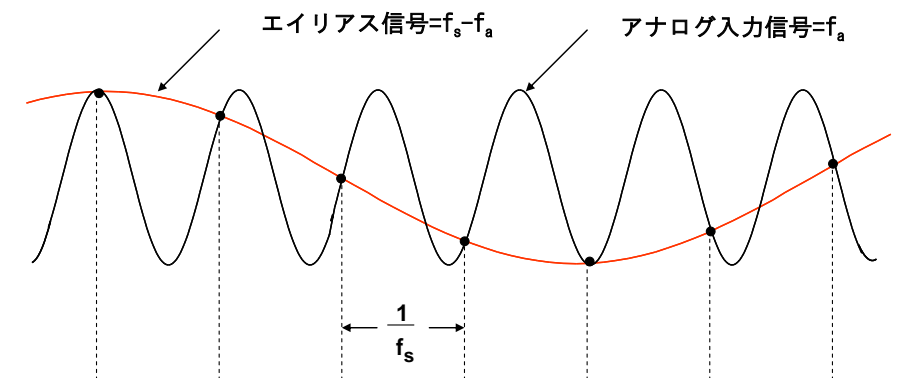
図 3. AC 信号の A/D 変換に必要なサンプル&ホールド機能

## ナイキストの基準

ADC は、連続するアナログ信号を、離散化された時間間隔  $t_s=1/f_s$  でサンプリングします。この  $t_s$  の値は、元のアナログ信号の情報を正確に表現するために、慎重に選択する必要があります。基本的には、取得するサンプル数が多い（サンプリング・レートが高い）ほど、正確なデジタル化が行えます。取得するサンプル数を少なくしていく（サンプリング・レートを低くすると、あるポイントから元の信号の重要な情報が失われることになります。ナイキストは、1924 年と 1928 年に発表した 2 つの有名な論文で、サンプリングに関する数学的な基礎理論を示しました（参考文献 1、同 2、同 6 の第 2 章）。その直後に、R. V. L.ハートレーがナイキストの理論に補足を加えています（参考文献 3）。これらの論文は、1940 年代に行われた PCM（パルス符号変調）に関する研究の基礎となりました。1948 年にはクロード・シャノンが通信理論に関する有名な論文を執筆しています（参考文献 4）。

ナイキスト基準とは、簡単に言えば、元の信号に含まれる最も高い周波数成分に対し、サンプリング周波数は少なくともその周波数の 2 倍以上でなければ、元の信号の情報が失われるというものです。サンプリング周波数がアナログ入力信号の最高周波数の 2 倍に満たない場合、エイリアシングとして知られる現象による誤差が発生します。（実際には、サンプリングを行えば、エイリアシングは必ず起こる）

時間領域と周波数領域でのエイリアシングの影響について理解するために、まずは単一周波数の正弦波信号をサンプリングし、その結果を時間領域で表してみましょう（図 4）。この例において、サンプリング周波数  $f_s$  はアナログ入力信号の周波数  $f_a$  よりもわずかに高いだけです。つまり、 $2 \times f_a$  よりも低く、ナイキストの基準を満たしていません。この場合、実際のサンプル・パターンは周波数が  $f_a$  の信号にも対応していますが、それに加えて実際は存在しない  $f_s - f_a$  という低い周波数の正弦波信号（エイリアス）にも対応しています。言い換えれば、サンプル・パターン（サンプリングされた後のデータ）からは、元の信号の周波数が  $f_a$  だったのか  $f_s - f_a$  だったのかは判別できないということです。



注： $f_a$  は  $f_s$  よりもわずかに低い

図 4. 時間領域におけるエイリアシングの表現

図 5-B は、この状態を周波数領域で表したものです。ここでは、周波数が  $f_a$  の単一正弦波を、理想的なインパルス・サンプラによって周波数  $f_s$  でサンプリングするケースを考えます。サンプリング周波数については、図 5-A に示すように、 $f_s > 2f_a$  であるとします。サンプラからの出力を周波数領域で見ると、 $f_s$  の整数倍の周波数の周辺に元の信号のエイリアス（イメージ、折り返し）が生じています。つまり、 $|\pm Kf_s \pm f_a|$  ( $K=1, 2, 3, 4, \dots$ ) の周波数成分が生成されるということです。

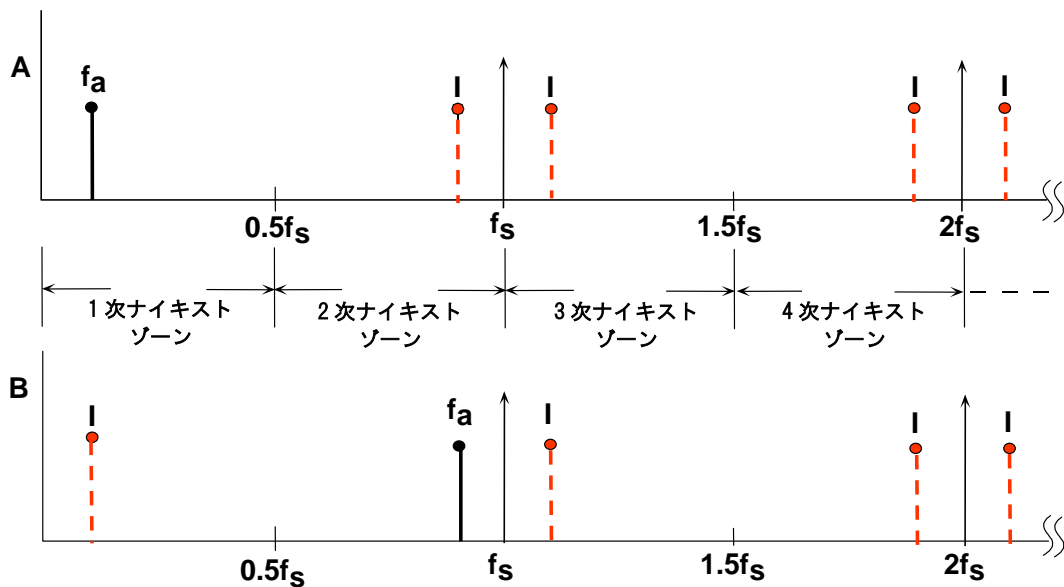


図 5. 理想的なサンプラを使用して周波数が  $f_a$  の正弦波をサンプリング周波数  $f_s$  でサンプリングした結果。  
 $|\pm Kf_s \pm f_a|$  ( $K=1, 2, 3, 4, \dots$ ) にエイリアス（イメージ）が生じる

ナイキスト帯域幅は、 $DC \sim f_s/2$  として定義されています。図 5 に示すように、周波数領域は、幅が  $0.5 \times f_s/2$  ( $0.5 \times f_s$ ) の無限個のナイキストゾーンに分割することができます。実際には、理想的なサンプラではなく、現実の ADC と FFT プロセッサが使用されます。FFT プロセッサは、 $DC \sim f_s/2$  の出力、つまり、1 次ナイキストゾーンに現れる信号とエイリアスのみを出力します。

ここで、入力信号が 1 次ナイキストゾーンの外にある場合を考えます。図 5-B は、この状態に相当します。図 4 の時間領域の表現で示したように、入力信号の周波数はサンプリング周波数よりもわずかに低いだけです。元の信号は 1 次ナイキストゾーン外にありますが、そのエイリアスである周波数成分である  $f_s - f_a$  の信号（あるいはノイズ）は 1 次ナイキストゾーン内に現れることに注意してください。ここで、図 5-A にもう 1 度戻ります。仮にシステムにとって不要な信号、即ちノイズが存在し、その周波数が、 $f_a$  のイメージ周波数のうちいずれかであったとします。その場合、そのイメージが  $f_a$  にも現れてしまいます。つまり、1 次ナイキストゾーンに、もともとは存在しなかった周波数成分が生成されてしまうということです。

これは、アナログ・ミキシング処理に似た現象だと言えるでしょう。この問題を回避するには、1 次ナイキストゾーン内にエイリアスが現れることを防ぐために、1 次ナイキストゾーン外の周波数成分をあらかじめ除去しておきます。つまり、サンプラ（ADC）の前段にはフィルタ（アンチ・エイリアシング・フィルタ）を配置しなければならないということです。そのフィルタに求められる性能は、 $f_s/2$  からどれだけ離れた周波数で、どれだけの減衰量が必要になるかによって決まります。

## ベースバンド・アンチエイリアシング・フィルタ

1 次ナイキストゾーン内にある信号をサンプリングの対象とすることをベースバンド・サンプリングと呼びます。このとき、理想的なサンプラの入力部にフィルタを配置していなければ、任意のナイキストゾーンにおける任意の周波数成分（信号とノイズ）が 1 次ナイキストゾーンに折り返されることとなります。そのため、ADC を使用するほとんどのアプリケーションでは、そうした帯域外の信号をあらかじめ除去するためにアンチエイリアシング・フィルタを使用します。

重要なのは、適切なアンチエイリアシング・フィルタを選択することです。それには、まずサンプリングする信号の特性を理解する必要があります。対象とする信号の上限周波数を  $f_a$  とすると、アンチエイリアシング・フィルタにより、DC $\sim f_a$ の信号を通過させ、 $f_a$ を超える信号を減衰させる必要があります。

フィルタのコーナー周波数として  $f_a$  を選択したとします。図 6-A に、システムのダイナミック・レンジ (DR) に対して、フィルタの減衰量の最小値から最大値までがどのように遷移するのかを示しました。

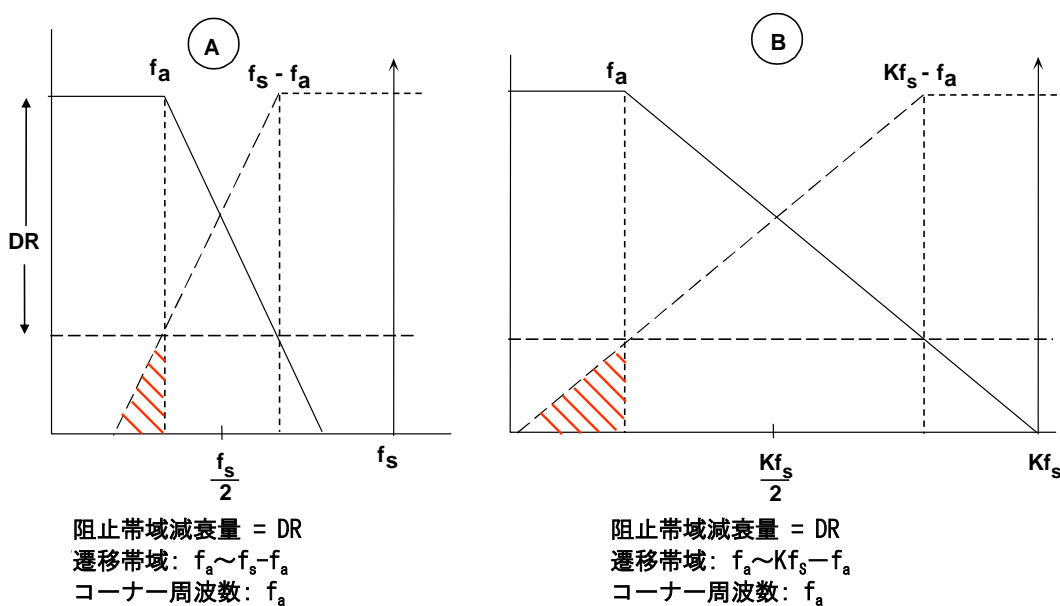


図 6. オーバーサンプリングによる効果。  
 ベースバンド・アンチエイリアシング・フィルタに対する要件が緩和される

ここで、周波数が  $f_a$  よりも十分に高いフルスケールの信号が入力されたとします。図 6-A は、周波数が  $f_s - f_a$  以上のフルスケールの成分が DC $\sim f_a$ の帯域内に折り返される様子を表しています。エイリアスはもともとの信号と区別できないことには変わりはありませんが、そのレベルは、図中で DR として示されているシステムのダイナミック・レンジ以下となります。

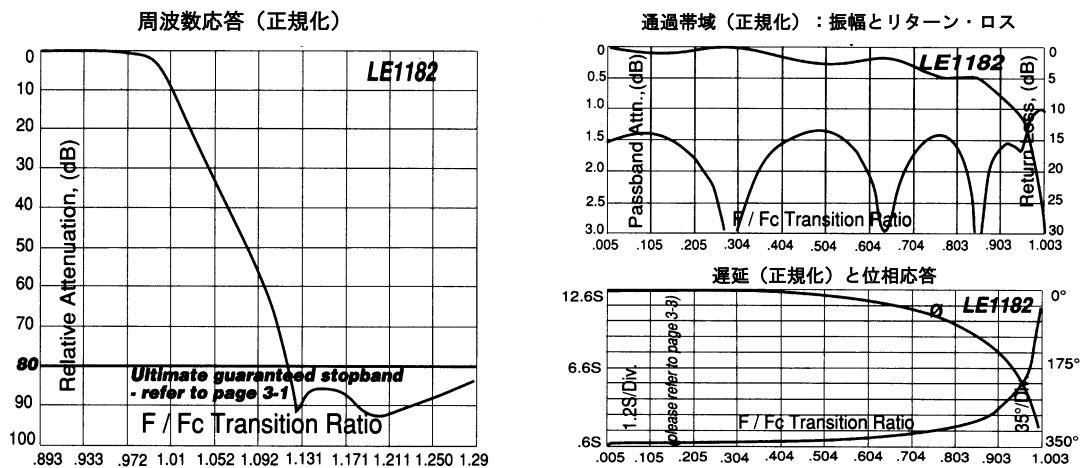
文献によっては、ナイquist周波数  $f_s/2$  を基準にしてアンチエイリアシング・フィルタを選択することを推奨しているものもあります。サンプリングの対象とする信号帯域幅 (以下、信号帯域) が DC $\sim f_s/2$  であるなら、その記述は妥当なのですが、実際にはそのようなケースはまれです。図 6-A に示した例で言えば、 $f_a \sim f_s/2$  の間のエイリアス成分は信号帯域の外にあり、ダイナミック・レンジを制限しません。

結論として、アンチエイリアシング・フィルタの遷移帯域は、コーナー周波数  $f_a$ 、阻止帯域周波数  $f_s - f_a$ 、所望の阻止帯域減衰量 DR によって決まります。システムに必要なダイナミック・レンジは、信号の忠実度 (fidelity) に対する要件に基づいて決定されます。

ほかのすべての条件が同じである場合、急峻な遷移帯域を得ようとするほどフィルタとしては複雑なものが必要になります。例えば、バターワース・フィルタの場合、フィルタの極当たり 6dB/octave の減衰特性が得られます (どのフィルタにもこのような減衰特性があります)。仮に 1MHz $\sim$ 2MHz の遷移帯域 (1octave) で 60dB の減衰を得たいとするなら、少なくとも 10 個の極が必要になります。そのようなフィルタは決して小規模なものではなく、設計の難易度は間違いなく高くなります。

そのため、急峻な遷移帯域、帯域内リップルの平坦さ、線形の位相応答が求められるアプリケーションには、ほかの種類フィルタのほうが適しています。実際、これらの条件を満たすものとして、楕円フィルタがよく使用されています。そうしたカスタム設計のアナログ・フィルタを提供する企業はいくつも存在します。TTE 社はそ

のような企業の一例です (参考文献 5)。図 7 に示したのは、アンチエイリアシングの用途に向けて同社が提供している 11 極の楕円フィルタ「LE1182」の周波数応答 (正規化したもの) です。このフィルタは、コーナー周波数  $f_c$  と  $1.2 \times f_c$  の間で少なくとも 80dB の減衰を達成します。図 7 には、このフィルタの通過帯域リップル、リターン・ロス (反射損失)、遅延、位相応答も示されています。



Reprinted with Permission of TTE, Inc.,  
 11652 Olympic Blvd., Los Angeles CA 90064  
<http://www.tte.com>

図 7. 11 極楕円フィルタの特性 (TTE 社の LE1182)

ここまで述べてきたことから、アンチエイリアシング・フィルタの遷移帯域にどの程度の急峻さが求められるかは、ADC のサンプリング周波数とトレードオフの関係にあることがわかります。サンプリング・レートを高くすると (オーバーサンプリング)、遷移帯域の急峻さに対する要件 (すなわち、フィルタの複雑さ) は緩和されます。その代わりに、より高速な ADC を使用し、より高いレートでデータを処理しなければなりません。図 6-B は、図 6-A に対し、コーナー周波数  $f_a$  とダイナミック・レンジ DR の条件は同じで、サンプリング周波数だけを K 倍にした様子を表しています。この場合は遷移帯域 ( $f_a \sim Kf_s - f_a$ ) が広いため、アンチエイリアシング・フィルタの設計は図 6-A の場合よりも容易になります。

アンチエイリアシング・フィルタを設計するには、まずサンプリング・レートを  $f_a$  の 2.5~4 倍の範囲で選択します。次に、必要なダイナミック・レンジに基づいてフィルタの仕様を定め、そのフィルタがシステムのコストと性能の制約の範囲内で実現可能であるかどうかを確認します。実現できない場合には、サンプリング・レートをさらに高めることを検討します。それには、より高速な ADC が必要になるかもしれません。なお、シグマ・デルタ ( $\Sigma\Delta$ ) 変調方式の ADC は、そもそもオーバーサンプリングを活用したもので、アンチエイリアシング・フィルタの要件を緩和することができます。このことは、 $\Sigma\Delta$  変調方式のアーキテクチャが備える付加的なメリットであると言えます。ただし、このタイプの AD コンバータにアンチ・エイリアス・フィルタが全く不要であるということではありません。

阻止帯域周波数である  $f_s - f_a$  に、大振幅の信号が絶対に現れないことが明らかな場合にも、アンチエイリアシング・フィルタの要件を緩和することができます。多くのアプリケーションにおいて、大振幅の信号がこの周波数に現れることはほぼあり得ません。 $f_s - f_a$  における最大の信号がフルスケールより  $X$  dB 以下のレベルを絶対に超えないのであれば、フィルタの阻止帯域減衰量に対する要件をそれと同じ量だけ緩和させることが可能です。つまり、この条件を満たす信号に対しては、 $f_s - f_a$  における阻止帯域減衰量は、 $DR - X$  dB でよいということです。この種の仮定に基づいて設計を行う際には、 $f_a$  よりも周波数が高く、信号帯域内に折り返されるノイズ信号に対しては慎重な対処が必要になります。



## アンダーサンプリングの基礎

ここまでは、ベースバンド・サンプリング、つまり対象とする信号がすべて1次ナイキストゾーン内にある場合について考えてきました。そのようなケースについて図で表したものが図8-Aです。信号帯域は1次ナイキストゾーン内に限定されており、ほかの各ナイキストゾーンに元の周波数帯域のイメージが現れています。

次に、図8-Bのケースについて考えてみましょう。すなわち、信号帯域が、完全に2次ナイキストゾーンに含まれている場合です。通常、1次ナイキストゾーン外の信号に対するサンプリングは、アンダーサンプリングと呼ばれています（あるいは、ハーモニック・サンプリング、バンドパス・サンプリング、IFサンプリング、IF-デジタル・ダイレクト・コンバージョンなどとも呼ばれます）。この場合、1次ナイキストゾーンに現れるイメージには、元の信号のすべての情報が含まれていることがポイントです。ただし、折り返しの結果生成されるイメージであるため、周波数軸上で見ると、スペクトルの出現順が逆になります。とはいえ、これについては、FFT出力を並べ替えることで簡単に修正することができます。

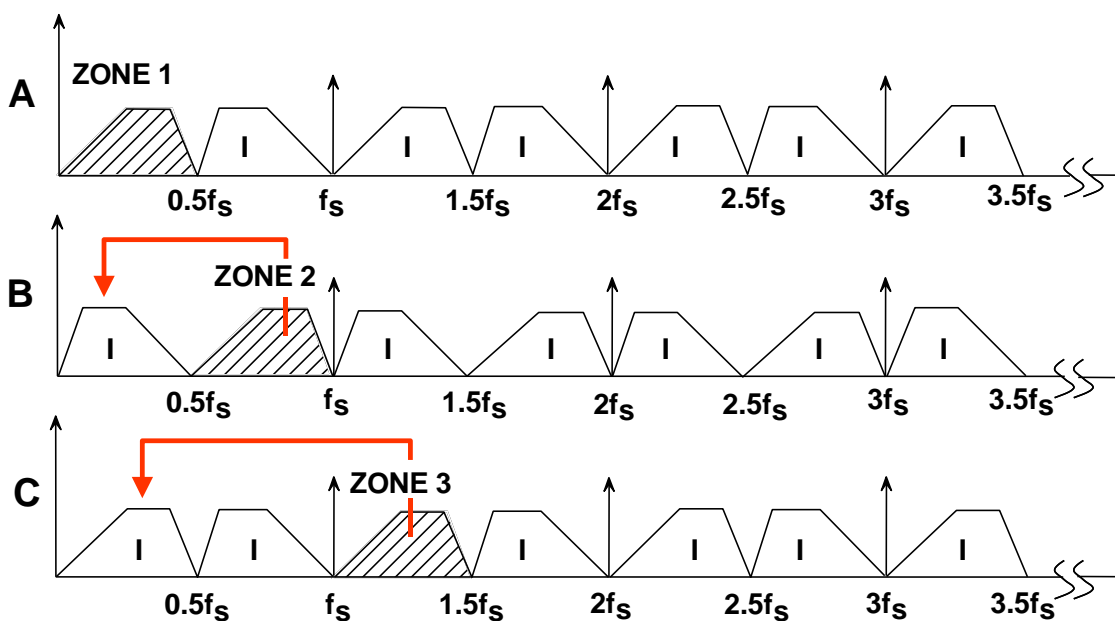


図 8. アンダーサンプリングによるナイキストゾーン間での周波数変換

図8-Cは、信号帯域が3次ナイキストゾーン内に限定されるケースです。この場合、1次ナイキストゾーンに現れるイメージは反転しません。図8-B、Cの例からわかるように、信号帯域がどの単一のナイキストゾーンに含まれる場合でも、1次ナイキストゾーンには正確な情報を持ったイメージが現れます（異なるのは、偶数次のナイキストゾーンに信号がある場合には反転が起きることだけです）。以上のことから、ナイキストの基準をベースバンド信号に適用する場合には、その定義を次のように言い換えることができます。

**帯域幅がBWの信号のすべての情報を維持するには、その帯域幅の2倍（ $2 \times BW$ ）以上のレートでサンプリングする必要がある**

この定義では、周波数軸上における信号帯域の絶対位置については、何も言及していないことに注意してください。唯一の制約は、サンプリングの対象となる信号の帯域幅が単一のナイキストゾーン内に収まっていることです。つまり、信号帯域は $f_s/2$ の整数倍の領域をまたがってはいけません（これを満たすことが、アンチエイリアシング・フィルタの主要な役割だと言えます）。

通信分野では、1次ナイキストゾーンを超える信号をサンプリングするアプリケーションが増えています。その理由は、必要な処理がアナログ復調処理と等価であるためです。IF信号を直接サンプリングし、デジタル技術でその信号を処理することによって、IF復調器とフィルタを不要にすることが一般的になりつつあるのです。ただ

し、IF 周波数が高くなれば、当然のことながら ADC に求められるダイナミック性能はより厳しくなります。ADC の入力帯域幅と歪み性能が、ベースバンド信号だけでなく IF 信号に対しても適切であることが求められます。ところが、ほとんどの ADC は、1 次ナイキストゾーン内の信号のみを処理するように設計されており、この条件を満たすことができません。アンダーサンプリングを利用するアプリケーションで用いる ADC は、高次のナイキストゾーンにおいても優れたダイナミック性能を達成するものでなければなりません。

### アンダーサンプリング用のアンチエイリアシング・フィルタ

図 9 は、キャリア信号周波数  $f_c$  が 2 次ナイキストゾーンの中心に位置する帯域信号を示したものです。周波数の下限は  $f_1$ 、上限は  $f_2$  です。アンチエイリアシング・フィルタとしては、バンドパス・フィルタを使用します。必要なダイナミック・レンジは DR で、これによってフィルタの阻止帯域減衰量が決まります。遷移帯域は周波数が高いほうが  $f_2 \sim 2 \times f_s - f_2$ 、低いほうが  $f_1 \sim f_s - f_1$  です。ベースバンド・サンプリングの場合と同様に、サンプリング周波数を高くすればアンチエイリアシング・フィルタの要件を緩和することができます。ただし、それと同時に、2 次ナイキストゾーンの中心になるように  $f_c$  を変更する必要があります。

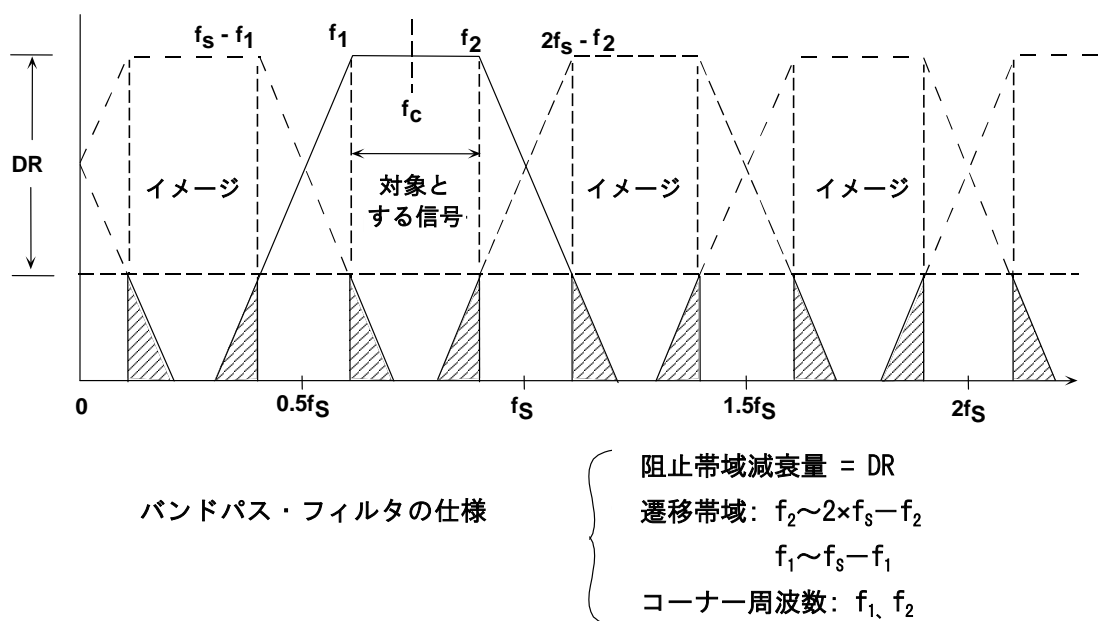


図 9. アンダーサンプリング用のアンチエイリアシング・フィルタ

キャリア周波数  $f_c$  と信号帯域幅  $\Delta f$  に対し、サンプリング周波数  $f_s$  は、2 つの式を用いて選択することができます。まず、1 つ目はナイキストの基準を表す以下の式です。

$$f_s > 2\Delta f \tag{式 5}$$

もう 1 つは、2 次ナイキストゾーンの中心に  $f_c$  があるという条件を表す以下の式です。

$$f_s = \frac{4f_c}{2NZ - 1} \tag{式 6}$$

ここで、 $NZ=1, 2, 3, 4, \dots$  であり、これはキャリアとそれに対応する信号帯域が含まれるナイキストゾーンの次数を表します (図 10)。

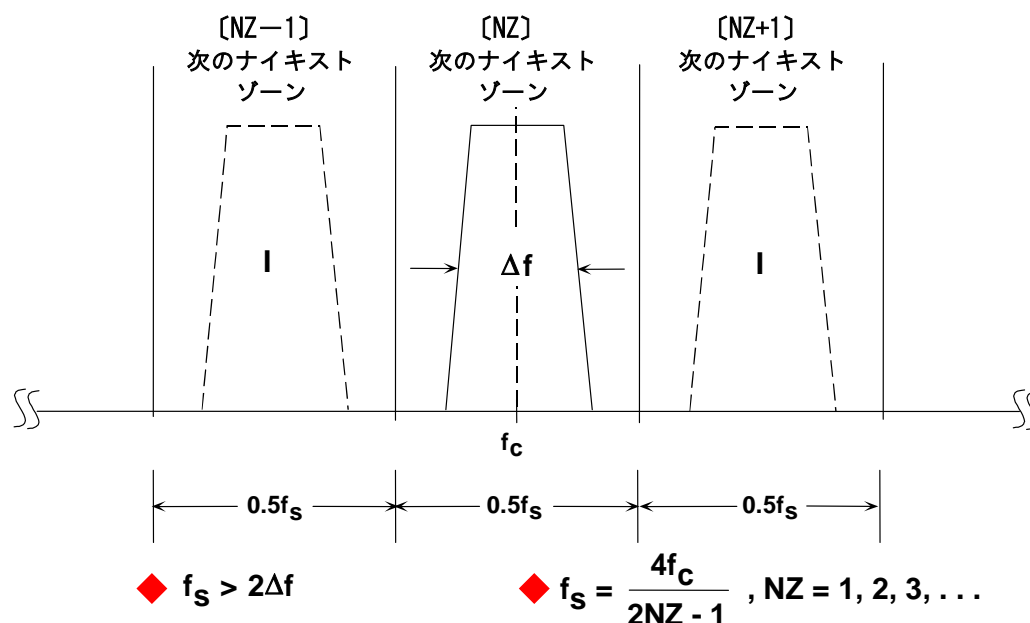


図 10. アンダーサンプリング信号とナイキストゾーンの関係

通常、NZ (ナイキスト・ゾーン) は、高い IF 信号に対応できるようにできるだけ大きな値を選択します。どのような値を選択する場合でも、ナイキストの基準に従い、 $f_s > 2\Delta f$  である必要があります。NZ として奇数の値を選択すれば、 $f_c$  とそれに対応する信号帯域は奇数次のナイキストゾーンに含まれることになり、1 次ナイキストゾーンに現れるイメージは反転しません。

例として、71MHz のキャリア周波数を中心とする 4MHz 幅の信号を考えます。つまり、サンプリングレートは 8MSPS 以上でなければなりません。 $f_c=71$  [MHz] と  $f_s=8$  [MSPS] を式 6 に代入して NZ を求めると、 $NZ=18.25$  となります。NZ は整数でなければならないので、18.25 を超えない最大の整数である 18 を選びます。この値を再び式 6 に代入して  $f_s$  を求めると、 $f_s=8.1143$  [MSPS] が得られます。したがって最終的な値は、 $f_s=8.1143$  [MSPS]、 $f_c=71$  [MHz]、 $NZ=18$  となります。

次に、アンチエイリアシング・フィルタのマージンをもう少し大きく確保したいケースを考えます。 $f_c=71$  [MHz]、 $f_s=10$  [MSPS] を式 6 に代入して NZ を求めると、 $NZ=14.7$  となります。14.7 を超えない最大の整数を選択して、 $NZ=14$  とします。この値を再び式 6 に代入して  $f_s$  を求めると、 $f_s=10.519$  [MSPS] が得られます。したがって、最終的な値は  $f_s=10.519$  [MSPS]、 $f_c=71$  [MHz]、 $NZ=14$  となります。

なお、上記の検討は、 $f_s$  を起点として、NZ が整数になるようにキャリア周波数を調整するという方法で行ってもかまいません。

## まとめ

このチュートリアルでは、ナイキスト基準の基本と、時間領域と周波数領域の両方におけるエイリアシングの影響について説明しました。続いて、ナイキスト基準に関する実用的な知識に基づき、アンチエイリアシング・フィルタを適切に選択する方法を示しました。さらに、現代の通信システムで利用されているオーバーサンプリングとアンダーサンプリングについて詳細に解説しました。

## 参考文献

1. H. Nyquist, "Certain Factors Affecting Telegraph Speed," Bell System Technical Journal, Vol. 3, April 1924, pp. 324-346.
2. H. Nyquist, Certain Topics in Telegraph Transmission Theory, A.I.E.E. Transactions, Vol. 47, April 1928, pp. 617-644.
3. R.V.L. Hartley, "Transmission of Information," Bell System Technical Journal, Vol. 7, July 1928, pp. 535-563.
4. C. E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication," Bell System Technical Journal, Vol. 27, July 1948, pp. 379-423 and October 1948, pp. 623-656.
5. TTE, Inc., 11652 Olympic Blvd., Los Angeles, CA 90064, <http://www.tte.com>.
6. Walt Kester, [\*Analog-Digital Conversion\*](#), Analog Devices, 2004, ISBN 0-916550-27-3, Chapter 2. Also Available as [\*The Data Conversion Handbook\*](#), Elsevier/Newnes, 2005, ISBN 0-7506-7841-0, Chapter 2.