

**位相ノイズとジッタの電力スペクトル密度：
理論、データ解析、実験結果**
by Gil Engel**はじめに**

A/D コンバータ、D/A コンバータに使用するサンプリング・クロックのジッタは達成可能な最大 S/N 比を制限します。（リファレンス・セクションの *Integrated Analog-to-Digital and Digital-to-Analog Converters by van de Plassche* を参照）このアプリケーション・ノートでは位相ノイズとジッタについて明らかにします。位相ノイズとジッタの電力スペクトル密度について議論を展開し、時間領域と周波数領域の測定技術について述べ、実験装置の制限を説明し、これら技術に対する補正係数を提供します。紹介した理論は現実の世界の問題に対して行われた実験結果によって裏づけられます。

概要

電子機器で使用されるクロックを発生する技術はたくさんあります。回路は R-C 帰還回路、タイマー、発振器、クリスタル、クリスタル発振器を含みます。回路条件によっては、比較的高い位相ノイズ（ジッタ）でも、比較的安価なクロック源を使用できる可能性があります。しかし最近のデバイスはより優れたクロック性能（つまりより高価な）のクロック源を必要とします。類似した要求がコンバータでサンプリングされる信号（特に現在の高性能コンバータのテストに信号源として使用される周波数シンセサイザ）のスペクトル純度に対してもあります。この後のセクションで位相ノイズとジッタの定義を示します。次に位相ノイズとジッタをそれらの周波数領域表現に関連づける数学的な導出を行います。位相ノイズ/ジッタの周波数領域での表現（又は電力スペクトル密度）は位相ノイズ/ジッタを直接表します。導き出される理論は A/D コンバータと D/A コンバータに結びつけられます。各種の信号を測定するためにスペクトル・アナライザとオシロスコープを使用します。最後に理論は A/D コンバータ (ADC) [AD9235](#) に施した実験の結果と結びつけられます。

目次

はじめに.....	1	テスト装置.....	10
概要.....	1	オシロスコープ.....	10
改定履歴.....	2	スペクトル・アナライザ.....	10
定義.....	3	証明.....	11
位相ノイズ.....	3	実験結果.....	12
ジッタ.....	3	信号1.....	12
電力スペクトル密度.....	5	信号2.....	12
例1.....	6	信号3.....	13
例2—位相ノイズ.....	6	高速コンバータ.....	15
例3—ジッタ.....	7	結論.....	17
コンバータへの応用.....	8	リファレンス.....	17
例1.....	9		

改訂履歴

4/10—Revision 0:初版

定義

位相ノイズとジッタにはいろいろの解釈があります。このアプリケーション・ノートでは、位相ノイズとジッタを次のように規定します。

サイン波を考えます、

$$\sin(\omega t + A)$$

(1)

ここで:

$$\omega = 2\pi f.$$

f は所望の周波数.

A は一定の位相オフセット。

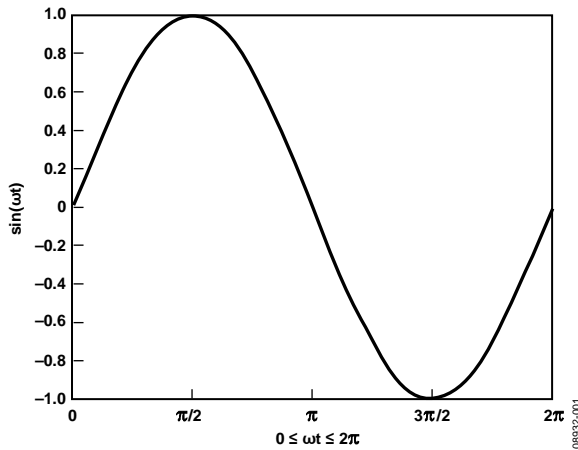


図 1.正規化したサイン波

位相ノイズ

位相ノイズを任意の関数 $\Phi(t)$ と定義すると、式 1 は下記の式のように表せます。

$$\sin(\omega t + A + \Phi(t))$$

(2)

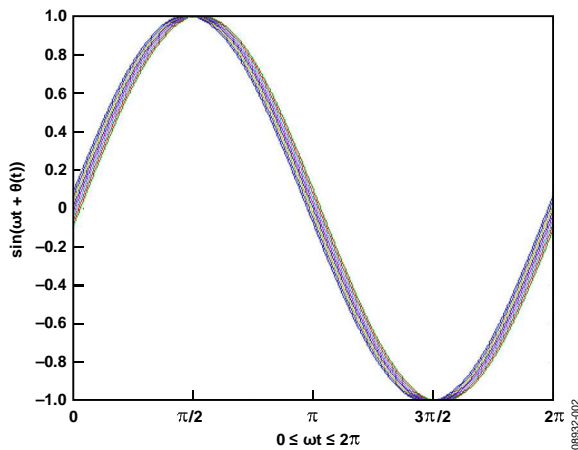


図 2.位相ノイズを含むサイン波信号

関数 $\Phi(t)$ は ωt に関係しない周波数成分、例えば熱ノイズ、ショットノイズ、 $1/f$ ノイズ (フリッカーノイズ)、で構成される可能性があります。しかしほとんどの場合は、それはガウス・ノイズとしてモデル化されます。(リファレンス・セクションの **Frequency Synthesizers Theory and Design Third Edition** by Manassewitsch を参照)

同様に、サンプル・クロックは次式のような固定した時間間隔 τ で繰り返す立ち上がり、立下りのある周期的な矩形波と考えられます。

$$\tau = 1/f$$

(3)

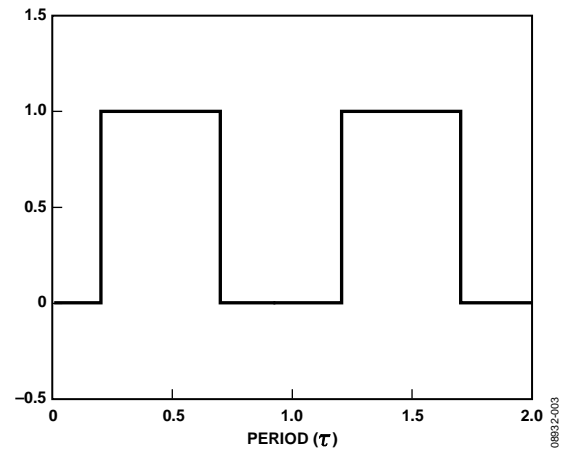


図 3.サンプリング・クロック

ジッタ

ジッタは固定した間隔 τ に追加される時間変化 $\Delta(t)$ として定義され次式で表せます。

$$\tau + \Delta(t) = 1/f + \Delta(t)$$

(4)

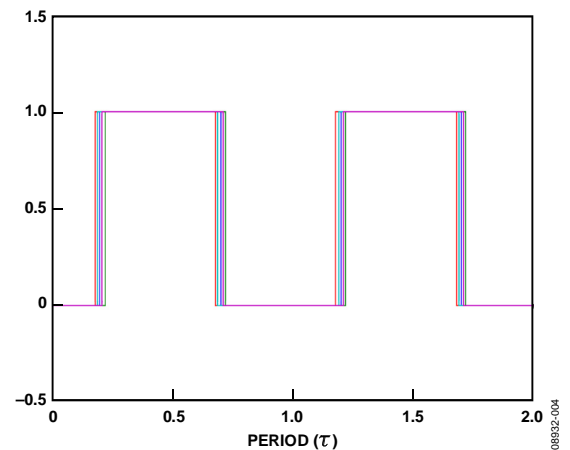


図 4.ジッタのあるサンプリング・クロック

同様に、 $\Delta(t)$ は一般的にガウス・ノイズとして特性化されます。

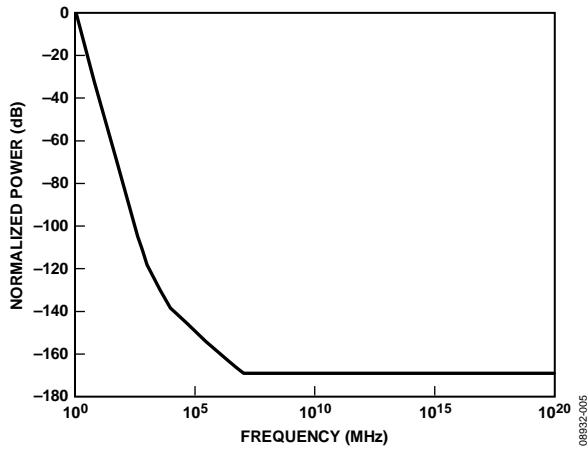


図 5.発振器のシングル・サイドバンドのノイズ・スペクトル

5 kHz 以上でアクティブ・デバイスが高周波で制限されるまでの周波数におけるノイズ解析は単純です。5 kHz 以下のノイズはショットノイズや熱ノイズより大きくなります。このノイズは周波数に逆比例し、 $1/f$ ノイズとして知られています。図 5 は発振器の一般的なノイズ・スペクトルを示しています。（リファレンス・セクションの Manassewitsch を参照）

電力スペクトル密度

時間領域信号はフーリエ変換を通して周波数領域に直接的な関係があります。(レファレンス・セクションの Discrete-Time Signal Processing by Oppenheim を参照) リファレンスフーリエ変換は信号の振幅と位相のスペクトルと見なす事が出来ます。信号の電力も周波数領域で表示する事ができます。電力スペクトル密度又は電力スペクトルは次の式によって与えられます。

$$S_{yy}(\omega) = Y(\omega) \times Y'(\omega) \tag{5}$$

ここで $Y(\omega)$ は $y(t)$ のフーリエ変換です。

"定義"のセクションで前に述べたように、 $\Phi(t)$ は任意の望ましくない信号と考えられます。この解析を簡略化するために、 $\Phi(t)$ を単一周波数に設定します。次式を考えます。

$$\Phi(t) = \theta_d \sin \omega_m t \tag{6}$$

そこで式 2 は次のようになります。

$$y(t) = \sin(\omega_c t + \theta_d \sin \omega_m t) \tag{7}$$

結果は、位相変調された信号 $y(t)$ となり、最大位相偏差は周波数 f_m ($\omega_m = 2\pi f_m$) で θ_d (ラジアン) です。又オフセットはゼロ ($A=0$) です。

ヤコビ・アンガールの展開式 (リファレンス・セクションの Concise Encyclopedia of Mathematics by Weisstein を参照) を次に示します。

$$e^{iz \cos(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta} \tag{8}$$

又は

$$e^{iz \sin(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta} \tag{9}$$

オイラーの等式 を使用し書き直すと下記の式が得られます。

$$\cos(z \sin \theta) = J_0(z) + 2 \times \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos(2n\theta) \tag{10}$$

そして

$$\sin(z \sin \theta) = 2 \times \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \cos[(2n-1)\theta] \tag{11}$$

ここで $J_n(z)$ 係数は第一種ベッセル関数です。

三角関数の等式を用いて、式 7, 式 8, 式 10, 式 11 を書きなおすと下記の式が得られます。

$$\begin{aligned} y(t) = & J_0(\theta_d) \sin(\omega_c t) \\ & + J_1(\theta_d) [\sin(\omega_c + \omega_m)t - \sin(\omega_c - \omega_m)t] \\ & + J_2(\theta_d) [\sin(\omega_c + 2\omega_m)t - \sin(\omega_c - 2\omega_m)t] \\ & + J_3(\theta_d) [\sin(\omega_c + 3\omega_m)t - \sin(\omega_c - 3\omega_m)t] \\ & + \dots \end{aligned} \tag{12}$$

式 12 から $y(t)$ はキャリア周波数 f_c で 1 次ベッセル成分があり、キャリア周波数から変調周波数 f_m の倍数オフセットした周波数でベッセル重み付け信号が存在する事がわかります。

$f_c = 32,768$ Hz で $f_m = 1024$ Hz、位相偏差が 500mrad(mrad はミリラジアン) の場合の関数 $y(t)$ の電力スペクトル密度 $S_{yy}(\omega)$ を図 6 に示します。

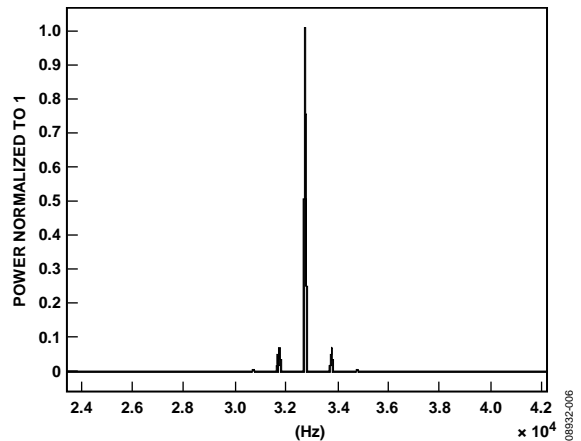


図 6.電力スペクトラム密度、 $S_{yy}(\omega)$

図 6 は下記の式のグラフです。

$$S_{yy}(\omega) = Y(\omega) \times Y'(\omega)$$

ここで $Y(\omega)$ は $y(t)$ のフーリエ変換です。

$S_{yy}(\omega)$ は周波数 f での電力の大きさを表します。単一周波数 f_m のみにより変調された信号 $y(t)$ の電力スペクトル密度は f_c と f_m でベッセル関数の二乗の大きさの周波数成分があります。

高次数のベッセル係数ほど非常に早く減衰します。対数電力目盛であれば広いダイナミック・レンジを表示できるので、大きなキャリア成分と同じグラフ上でより高次の成分を表すことができます。 $S_{yy}(\omega)$ の対数は次の式になります。

$$L_{py}(\omega) = 10 \log_{10}(S_{yy}(\omega)) \tag{13}$$

そして図 7 に示します。

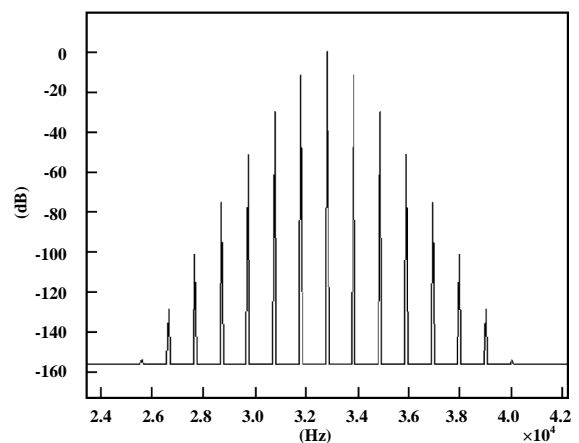


図 7.電力スペクトラム密度の対数、 $S_{yy}(\omega)$

ここで他の項も明確に見えるようになりました。位相偏差が増すと、キャリア周波数の大きさが減少し、変調項の大きさが増します。位相偏差が 500 mrad の場合、キャリア電力は約 12%減少します。

位相偏差が小さい場合、 $\theta_d \ll 1$ rad, $J_0(\theta_d) \approx 1$, $J_1(\theta_d) \approx \theta_d/2$, で $J_2(\theta_d) \dots J_n(\theta_d) \approx 0$ (リファレンス・セクションの Manassewitsch を参照)

位相偏差がゼロに近づくと、キャリア電力は **100%** に近づきます。さらに、位相偏差が小さいと変調項の中に分散されたキャリア周波数電力の割合がより小さくなります。結局この事により $\Phi(t)$ の電力をより正確に近似した変調項の合計になります。

ベッセル関数は次の関係があります:

$$1 = J_0(\beta)^2 + 2 \times \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\beta)^2 \quad (14)$$

位相偏差が小さい時の特徴を利用すると、 $\Phi(t)$ (シングルトーン・サイン波変調) の二乗平均平方根 (rms) 電力はおおよそ次式で表せます。

$$P_{\text{rms}} \approx 2 \times \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\beta)^2 \quad (15)$$

又は

$$P_{\text{rms}} \approx 1 - J_0(\beta)^2 \quad (16)$$

位相偏差も又 rms 振幅に換算して表示できます。

$$A_{\text{rms}} \approx \sqrt{P_{\text{rms}}} \quad (17)$$

例 1

位相偏差 θ_d が 100mrad の場合

$$\begin{aligned} P_{\text{rms}} &\approx 1 - J_0(0.1)^2 \\ P_{\text{rms}} &\approx 1 - 0.9950094 \\ P_{\text{rms}} &\approx 1 - 0.0049906 \\ A_{\text{rms}} &\approx 0.0706444 \end{aligned}$$

この結果をサイン波信号の電力と比べます。

$$\begin{aligned} e(t) &= A \sin(\omega t) \\ P_e &= A^2/2 \end{aligned}$$

$A = 0.1$ とすると、rms 電力が $P_e = 0.0005$ で、 $A_{\text{rms}} = A/\sqrt{2} = 0.0707107$ となり、小さな位相偏差の場合、変調項の合計は rms 電力を良く近似した値になる事が確認できます。

この議論はもっと複雑な変調信号にも展開できます。もっと複雑な変調関数は (互いにスペクトルに影響を及ぼす) たくさん周波数項の重ね合わせとして取り扱えます。電力スペクトル密度は追加の項を持つので、それを合計して変調信号の rms 電力を表します。振幅が小さい場合 ($\theta_d \ll 1$ rad)、任意の関数 $\Phi(t)$ の rms 電力は次式で与えられます。

$$P_{\text{rms}} = \int S_{yy}(\omega) d\omega - S_{yy}(\omega = \omega_c) \quad (18)$$

式 18 は位相変調した信号の rms 電力はすべての成分の合計から基本波 (又はキャリア周波数) の電力を減算した値に等しくなる事を述べています。

サイン波信号 $y(t)$ の場合、位相変調は対称の電力スペクトル密度を生むので、rms 電力も又次式で与えられます。

$$P_{\text{rms}} = 2 \times \int_{\omega > \omega_c} S_{yy}(\omega) d\omega \quad (19)$$

これはシングル・サイドバンド測定技術と呼ばれていて通常ルート・ヘルツあたりの値です。(レファランス・セクションの Manassewitsch を参照)

rms 変調はいくつかの方法で表せます。

$$\begin{aligned} A_{\text{rms}} &\approx \sqrt{P_{\text{rms}}} \quad \text{ラジアン (式 19 に表示)} \\ A_{\text{rms}}^0 &\approx 360 \times \sqrt{P_{\text{rms}}}/2\pi \end{aligned} \quad (20)$$

式 20 は位相偏差を度で表示します。

位相ノイズを時間ジッタと関連づけるために、次の式を使用します。

$$A_{\text{rms}}^t \approx \tau \times \sqrt{P_{\text{rms}}}/2\pi \quad (21)$$

ここで $\tau = 1/f_c$ は位相偏差を時間で表します。

例 2-位相ノイズ

ノイズの多いサイン波を理想クロックでサンプリングする場合を考えます。

$$y(t) = \sin(\omega_c t + N(t))$$

ここで:

$$\omega_c = 2\pi 26,2144.$$

$N(t)$ は標準偏差 $\sigma = 10$ mrad のガウス・ノイズです。

形成した信号を 1 秒あたり 4 百万のサンプル数で 15ms の間サンプリングし、65,000 のサンプルを得ます。電力スペクトル密度の対数を 0 dB で正規化して、図 8 に示します。

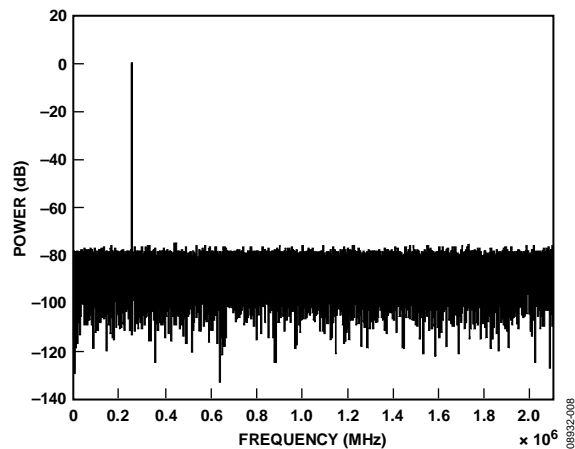


図 8.260 kHz, 10 mrad 位相ノイズ

基本波は約 260 kHz で、全スペクトルに渡ってノイズがあります。

式 18 の離散形式を使って

$$P_{\text{rms}} = \sum_{n=0}^{N/2} S_{yy}(n), \quad n \neq n_c \quad (22)$$

基本波での電力は含まずに、0 からナイキスト周波数までの全周波数での電力の大きさを合計します。その結果のノイズ電力は

$$P_{\text{rms}} = 1.0017 \times 10^{-4}$$

rms 振幅は $A_{\text{rms}} \approx 0.010008$ rad です。

不一致分 0.008 mrad は 10 mrad の rms ノイズ振幅より数ケタ小さく、非常に良好な近似が得られ事がわかります。

位相偏差が $\Phi(t_0)=0$ の場合入力信号の振幅は時間 t_0 で A_0 です。位相偏差が $\Phi(t_0) = \Delta\phi$ mrad でノイズの多い入力信号の場合、時間 t_0 で振幅が A_ϕ になります。同様に、時間変位 $t_1 = t_0 + \Delta t$ でサンプリングされる入力信号は振幅 A_τ になります。

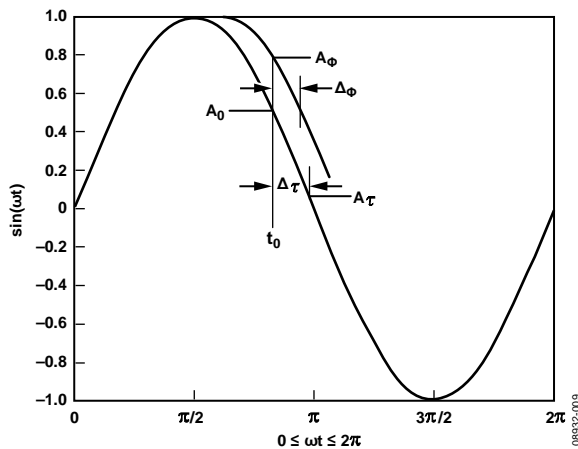


図 9.サイン波信号のタイミングと位相変位の影響

図 9 は同じ振幅, A_Δ を生じる時間偏差 Δt と位相偏差 $\Delta\phi$ が存在する事を示しています。事実上ジッタ Δt , rms 時間偏差に等しい rms 振幅の位相偏差 $\Delta\phi$ は同様の結果になります。

例 3 : ジッタ

例 2 では、位相ノイズ $N(t)$ の信号の電力スペクトル密度はガウス分布になり、標準偏差 $\sigma = 10$ mrad です。今度はガウス・ノイズ $\eta(t)$ のあるジッタの多いクロックでサンプリングした信号を考えます。式 21 は位相ノイズ 10 mrad と同じ効果を生じる rms ジッタを決めるために使用する事ができます。結果の出力は

$$y(t) = \sin(\omega_c(t + \eta(t)))$$

ここでキャリア周波数は再び 260 kHz で、 $\eta(t)$ は標準偏差 6.0713 ns のガウス・ノイズです。

形成された信号を 1 秒あたり 4M のサンプル数で 15ms の間サンプリングして、65 k のサンプルを得ます。電力スペクトル密度の対数を 0 dB に正規化します。

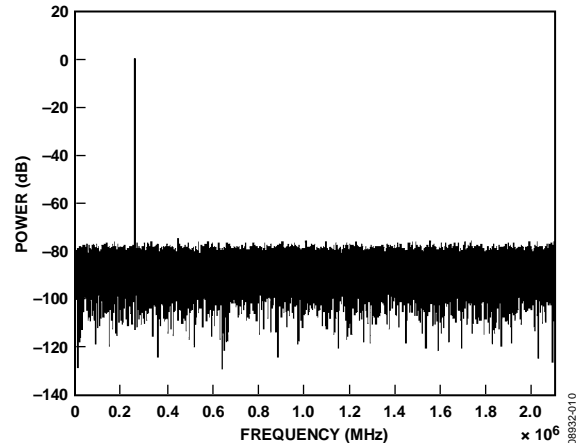


図 10.位相ノイズで変調した 260Hz トーンを 4 MSPS でサンプリングした時の 65k FFT

式 22 を使用し、基本波の電力は含まずに、0 からナイキスト周波数までの全周波数での電力の大きさを合計します。その結果のノイズ電力は

$$P_{rms} = 1.0031 \times 10^{-4}$$

そして rms 振幅は

$$A_{rms} = 0.010016 \text{ rad}$$

結果を式 21 に挿入し下の式を得ます。

$$A_{rms}^t = 4.86455 \times 10^{-8} \text{ s or } A_{rms}^t \approx 49 \text{ ns}$$

その結果は例 2 で得られた結果と一致します。

クロックや入力信号を変調している広帯域ノイズは分散されたノイズの電力スペクトルになります。又入力信号やクロックを変調するノイズはキャリア周波数中心に対称のノイズになります。電力スペクトル密度は特定の周波数成分あるいは周波数範囲に関連した位相ノイズやジッタを決めるために使用する事ができます。大きな対称項は信号そして/又はクロックを変調している特定の周波数を強調していると考えられます。特定の周波数に関連した rms 電力は電力スペクトル密度から直接引き出す事ができます。周波数の範囲については、下記の式が使用できます。

$$P_{rms} = \sum_{n=f_1}^{f_2} S_{yy}(n) \tag{23}$$

又はシングル・サイドバンドについては、

$$P_{rms} = 2 \times \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{yy}(\omega) d\omega \tag{24}$$

コンバータへの応用

現在の高速コンバータは 12 ビット以上の分解能で 100 MSPS 以上のサンプリング・レートがあります。

(SFDR) スプリアスフリー・ダイナミック・レンジが 100 dBc 以上あれば、70 dBc 以上の S/N 比 (SNR) は、常時達成されます。D/A コンバータ (DAC) の性能はサンプリング・クロックのジッタに直接影響されます。ノイズの多いクロックを使ってサンプリングしている DAC を使って生成された波形は位相ノイズをもった信号になる可能性があります。ADC はサンプリング・クロックと入力信号の両方のノイズに影響されます。例 3—ジッタのセクションで導かれた結果はコンバータに適用されます。

結果を ADC に結びつけ、図 11 に示す回路を検討します。

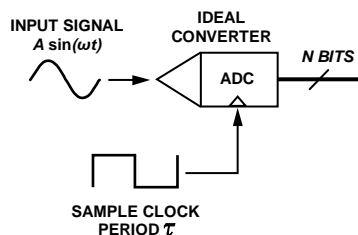


図 11.ADC 機能ブロック図

ADC は瞬時 t (周期 τ がある) に入力信号 $A \sin(\omega t)$ をサンプリングし、 N ビットの量子化された出力を生じます。

入力信号のノイズとサンプリング・クロックのノイズは独立していると仮定すると、総合ノイズは 2 乗和平方根で与えられます。もしノイズの大きさがかなり大きいと、コンバータの最大性能に影響を及ぼします。

量子化ノイズはビット数に直接比例します。出力データ・サンプルが ADC 範囲内にもつ最大誤差は最下位ビット分解能 Q_N を 2 で割算した値 ($Q_N/2$) です。(リファレンス・セクションの van de Plassche, Oppenheim, and Delta-Sigma Data Converters Theory Design and Simulation by Norsworthy, Schreier, and Temes を参照) 誤差はサンプリングされる信号によって定まります。ランダムに変化している信号の場合は、量子化誤差は無相関で、 $\pm Q_N/2$ 以内の任意の大きさになります。誤差が統計的にサンプリングされる信号に対して独立していれば、達成可能な最大 SNR は次式で示すことができます。

$$\text{SNR} = 6.02N + 1.8 \quad (25)$$

12 ビットコンバータの場合、理論的な最大 SNR は約 74 dBc です。74 dBc の総合量子化ノイズ電力は次の値に相当します。

$$P_{qn} \approx 10^{-7.4}$$

$$P_{qn} \approx 39.8107 \times 10^{-9}$$

テスト装置は被テスト・コンバータより 10 dB 優れている事が望まれます。12 ビットコンバータをテストする場合、要求されるテスト装置のノイズ電力は 84 dBc です。

$$P_{qn} \approx 10^{-8.4}$$

$$P_{qn} \approx 3.98107 \times 10^{-9}$$

式 17 を用いてこのノイズ電力を rms 位相偏差に関連づける事ができます。

$$A_{\text{rms}} \approx 0.0631 \text{ mrad}$$

入力信号 10 MHz の場合、これは下記のジッタに相当します。

$$A_{\text{rms}}^t \approx \tau \times \sqrt{P_{\text{rms}}/2}$$

$$A_{\text{rms}}^t \approx 100 \times 10^{-9} (\sqrt{3.98107 \times 10^{-9}})/2\pi$$

$$A_{\text{rms}}^t \approx 1.004 \times 10^{-12} \text{ sec}$$

表 11 表 1 はコンバータの量子化ノイズによる SNR リミット値と相当する位相ノイズ rms 振幅を一覧にしています。

表 11.コンバータ SNR リミット

ビット数	理論的な SNR リミット (dB)	対応する位相ノイズ (mrad)	テスト装置	
			10 dB (mrad)	6 dB (mrad)
8	49.96	3.177	1.005	1.592
10	62	0.794	0.251	0.398
12	74.04	0.199	0.063	0.1
14	86.08	0.0497	0.016	0.025
16	98.12	0.0124	0.004	0.006

表 1 には又テスト装置の位相ノイズ rms 振幅も、コンバータより 10 dB、6 dB 優れた値で示してあります。場合によってはコンバータより 6 dB 優れたテスト装置でも許容されます (特に 10 dB を得るのが困難な場合)。

式 21 を使用する事により等価のジッタ振幅が簡単に得られます。

コンバータの SNR 性能は一般的に電力スペクトル密度を使用して決定されます。サンプリング周波数とデータ・サンプル数が直接周波数分解能を決定します。32 MHz でサンプリングするコンバータに対して 4k FFT は周波数 8 kHz まで落として分解できる十分なデータを蓄積します。すなわち電力スペクトル密度は 8 kHz 間隔で情報を表示します。各 8KHz ビンはその間隔以内の周波数の電力とその間隔に折り返される周波数の電力の合計になります。キャリアから 1 kHz に存在する成分の大きさはこれらの条件下では決定されません。周波数分解能はより大きな FFT にする事により改善されます。1/f ノイズのような低周波位相ノイズも分解可能で、32 MHz でサンプリングするコンバータの場合、1M FFT にする事により 32 Hz まで分解可能です。

例 1

20 ps のクロック・ジッタによって 1 秒間あたり 32M サンプル数でサンプリングする 12 ビット ADC に対して、入力信号は 2 kHz, 1 mrad 位相ノイズ成分と 0.5 mrad のガウス位相ノイズを含む 4MHz とします。この設定を使用して 4k サンプルを取得すると、図 12 に示した電力スペクトル密度が得られます。

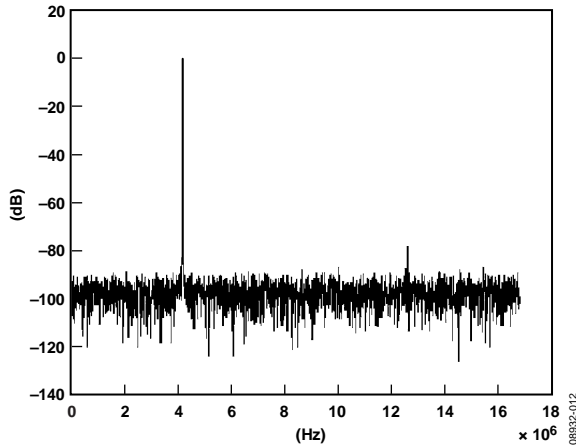


図 12. 変調された 4 MHz トーンを 32 MSPS でサンプリングした時の 4k FFT

式 22 を使用するとノイズ電力を 6.628^{-7} W と計算します。しかし理論値は (ジッタ, 位相ノイズ, 量子化ノイズの RSS となる) 5.677^{-7} W のはずです。

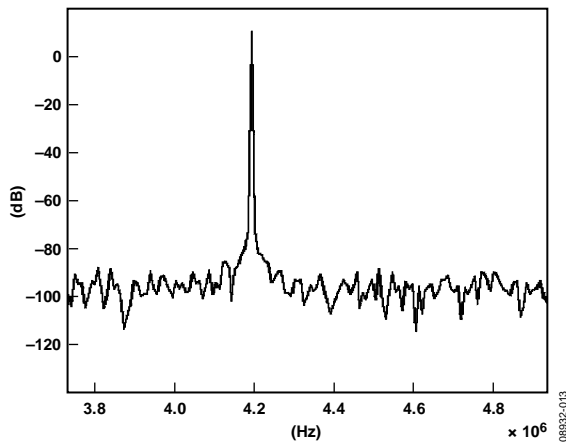


図 13. 低ビン分解能によってスカート状になる 4 MHz 基本波の拡大図

拡大図 (図 13 参照) は基本波周辺でスカート状に広がっている事を示しています。周波数分解能は 8 kHz で、2 kHz 変調項は基本波と周辺のビンと結びついています。

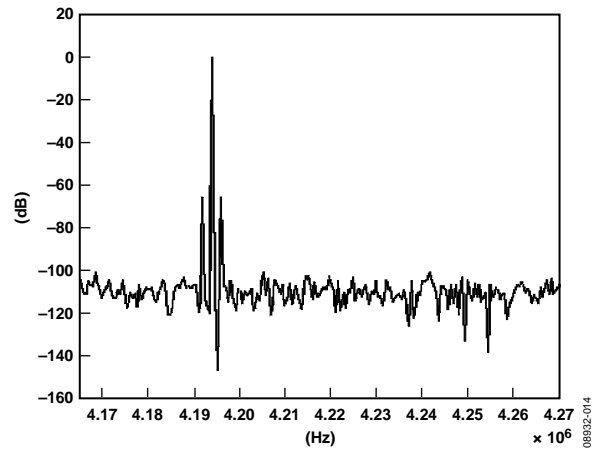


図 14. 変調項を示しているより高分解能の FFT

65kFFT を使うと、周波数は 500 Hz まで分解可能です。2 つの新しい対称項が見られますが、これは位相変調を意味します。これらの項が積分したノイズ電力に加算されると、ノイズ電力を 5.696^{-7} W と計算します。

テスト装置

位相ノイズとジッタはオシロスコープを使用して時間偏差として観察したり、スペクトラム・アナライザを使用して周波数スペクトルとして観察することができます。

オシロスコープ

オシロスコープは2種類に分けることができます: リアルタイムとサンプリング (リファレンス・セクションの *XYZs of Oscilloscopes by Tektronix* を参照)

リアルタイム・オシロスコープは単トリガー・イベントでサンプル・ストリームをとらえます。サイクル間偏差は固定されたしきい値でのデータから取り出されます。この方法はオシロスコープの時間間隔測定精度とその内部ジッタによって制限されます。テクトロニクス TDS7404 は精度 ± 8.5 ps、標準ノイズ・フロア 1.5 ps rms と規定されています。テクトロニクス TDS694C は精度 ± 15 ps です。精度の向上はオシロスコープの垂直分解能と、信号処理に長いレコード長を含むことにより、統計的手段で達成できます。テクトロニクスは後者の技術を使って 1.5 ps ジッタ測定精度を謳っています。(リファレンス・セクションの *Analyzing Clock Jitter Using Excel and Understanding and Performing Precise Jitter Analysis by Tektronix* を参照)

サンプリング・オシロスコープは各トリガーでの入力データを累積します。時間偏差を得るのに、入力信号は繰り返しサンプリングされ、水平断面で点分布を取得します。水平目盛と垂直目盛は測定される時間偏差の大きさにより調整されます。この時間偏差測定方法は主にトリガ・ジッタの大きさによって制限されます。サンプリング・オシロスコープの方が時間間隔精度についてははるかに優れております。そしてさらに重要な事ですが、サンプリング間隔は 10 fs 程度と低くなっております。テクトロニクス 11801C の時間間隔精度は $1 \text{ ps} + 0.0004\% \times (\text{position})$ でトリガ・ジッタは標準 1.1 ps rms です。TDS8000B テクトロニクス・サンプリング・オシロスコープのトリガ・ジッタは 800 fs と規定されています。(リファレンス・セクションの中の *Automatic Measurement Algorithms and Methods for the 8000 Series Sampling Oscilloscopes by Tektronix* を参照)

スペクトラム・アナライザ

スペクトラム・アナライザは信号をその周波数成分で表示します。スペクトルは設定された分解能帯域幅 (RBW) 以内の一連の測定値を表示します。スペクトラム・アナライザは信号の電圧そして/あるいは電力をリニア又は対数表示で表します。信号の電力の観察はフーリエ解析で得られた電力スペクトル密度のグラフに類似しています。

電子機器の中のランダムノイズはガウス分布です。それ故、スペクトラム・アナライザの RBW (分解能帯域幅) 以内のサンプルは確率分布を持っています; しかし、サンプルは単純な大きさで表示されます。スペクトラム・アナライザは実際には同相 (I) と直交 (Q) 成分で測定します (リファレンス・セクションの *Spectrum Analyzer Measurements and Noise by Hewlett Packard* を参照)。I/Q 成分から信号の大きさと位相が得られます。バンドパスを通過したノイズは I と Q の両方の成分が独立したガウス分布になります。

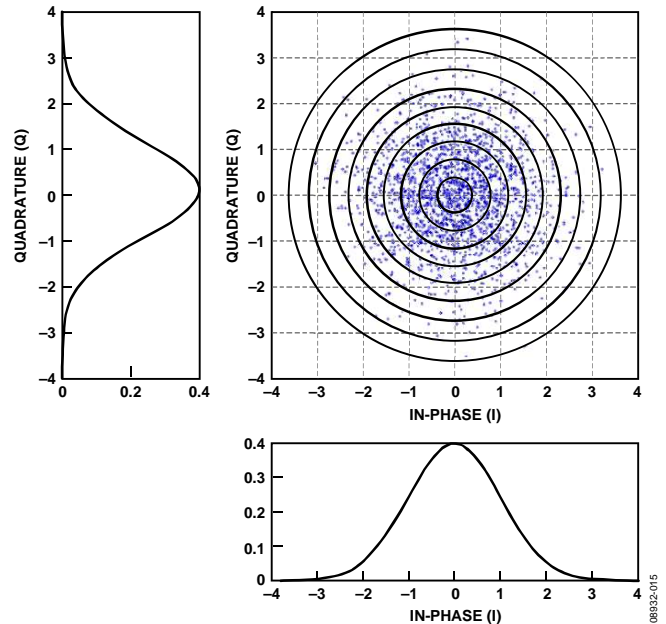


図 15. スペクトラム・アナライザ・エンベローブ検出器入力分布

大きさはエンベローブ検出器で得られ、次の式で与えられます。

$$v = \sqrt{v_I^2 + v_Q^2} \quad (26)$$

ノイズの大きさは図 15 の中心周辺に同心円を形成します。各円の中の数かノイズの大きさの分布になります。ノイズ・エンベローブの分布関数は実際レイリー分布です。

(リファレンス・セクションの *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes by Papoulis* を参照)

$$D_{env}(v) = \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \quad (27)$$

確率密度関数が判れば、次の式を使って電圧エンベローブの平均を決定することができます。

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v D_{env}(v) dv = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (28)$$

平均電力は次の式で与えられます。

$$\bar{p} = \int_0^{\infty} \frac{v^2}{R} D_{env}(v) dv = \frac{2\sigma^2}{R} \quad (29)$$

電力を計算するのに、平均エンベローブ電圧を二乗し、R で割算しても式 29 と同じ結果にはなりません。結果は 1.05 ビット小さくなります。

$$\begin{aligned} 10 \log\left(\frac{v^2/R}{p}\right) &= 10 \log\left(\frac{\sigma^2 \pi R}{4\sigma^2 R}\right) \\ &= 10 \log\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -1.05 \text{ dB} \end{aligned}$$

スペクトラム・アナライザをその対数表示モードで使用する時はさらに考慮しなければならないことがあります。対数表示モードでは入力信号は対数アンプを通過します。従ってこの値が対数変換された確率密度関数の結果になります。その上、スペクトラム・アナライザは対数の平均を表示します。結局対数処理によりノイズに対する応答は 2.51 dB 低い結果になります。

証明

下記はノイズの 2.51 dB 低い値になることの証明です。

$$P_{\log} = 10 \log(v^2) \text{ 又は } 20 \log(v) \quad (30)$$

左右両側の導関数をとりまします。

$$dp_{\log} = \frac{20}{\ln 10} \times \frac{1}{v} dv \quad (31)$$

$$v = 10^{\frac{P_{\log}}{20}} \quad (32)$$

と

$$dv = 10^{\frac{P_{\log}}{20}} \left(\frac{\ln 10}{20} \right) dp_{\log} \quad (33)$$

ライプニッツ則を使うと（リファレンス・セクションの Weisstein を参照）

$$f_y(y) = f_x(x) \frac{dx}{dy} \quad (34)$$

又はパボリスにより（リファレンス・セクションを参照）

$$f_y(y) = \frac{f_x(x)}{dy/dx} \text{ at } x = T^{-1}\{y\} \quad (35)$$

下記の式を得ます。

$$\begin{aligned} D_{\log}(p) &= \frac{D_{env}(v)}{dp_{\log}/dv} \\ &= \frac{10^{\frac{y}{20}} \times D_{env}(10^{\frac{y}{20}})}{20/\ln 10} \text{ at } v = 10^{\frac{y}{20}} \end{aligned} \quad (36)$$

結果は入力エンベロープの対数電力の確率分布です。

次に平均対数電力は次式で与えられます。

$$\overline{p_{\log}} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\log} D_{\log}(p_{\log}) dp_{\log} \quad (37)$$

ライプニッツ則（とパボリス）から

$$f_y(y) dy = f_x(x) dx$$

それ故

$$\begin{aligned} \overline{p_{\log}} &= \int_0^{\infty} p_{\log} D_{env}(v) dv \\ &= \int_0^{\infty} 20 \log(v) D_{env}(v) dv \\ &= \int_0^{\infty} 20 \log(v) \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \end{aligned} \quad (38)$$

ここで

$$\begin{aligned} 20 \log(v) &= 10 \log\left(\frac{2\sigma^2 v^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= 10 \log(2\sigma^2) + 10 \log\left(\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (39)$$

従って下記の式を得ます。

$$\begin{aligned} \overline{p_{\log}} &= 10 \log(2\sigma^2) \int_0^{\infty} \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \\ &\quad + \int_0^{\infty} 10 \log\left(\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \end{aligned} \quad (40)$$

初めの積分は 1 になります。なぜならこれは単にライプニッツ確率密度の積分だからです。ここで 2 番目の積分の中で次のように設定します。

$$u = \frac{v}{\sigma} \quad (41)$$

それを代入すると下記の式を得ます。

$$\overline{p_{\log}} = 10 \log(2\sigma^2) + \frac{10}{\ln 10} \int_0^{\infty} \ln(u) e^{-u^2} du \quad (42)$$

始めの項は平均電力の対数です；2 項目は負のオイラー・マスケローニ定数です（リファレンス・セクションの Weisstein を参照）。オイラー・マスケローニ定数は 7,000,000 デジットまで計算されていて Y で表されます。Y は約 0.5772 に等しいので、最後の項は -2.5067 になります。

最新のスペクトラム・アナライザは必要な補正係数を与えるノイズ測定を特徴としています。

正確な結果が得られるように（必要に応じて加える必要のある）既知の補正係数に与えると共に、スペクトラム・アナライザは正しく設定されなければなりません。入力信号が小さい場合は、リファレンス・レベルを低くする事により正確に測定できます。しかしリファレンス・レベルを低くすると入力 IF 段のゲインが増大します。最初の IF 段が過負荷にならないように注意する必要があります。IF 入力回路が過負荷になると歪み積を生ずる可能性があります。（リファレンス・セクションの Fundamentals of Spectrum Analysis by Rauscher を参照）さらに、分解能帯域（RBW）とビデオ帯域（VBW）それぞれを高める事により、より微細な周波数と振幅の分解能測定が行えます。しかし分解能を高めると掃引時間が長くなります。幸いにも、希望の測定値を取り、適切な補正係数を与えるソフトウェアが供給可能です。

実験結果

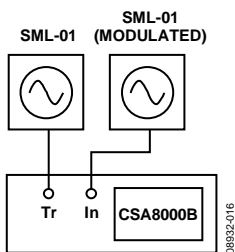


図 16.オシロスコープの接続

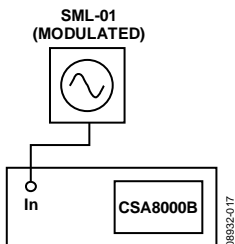


図 17.スペクトル・アナライザの接続

Rohde & Schwarz SML-01 で発生した変調信号を Tektronix CSA8000B and a Rohde & Schwarz FSIQ7 を使用して測定しました。一つ目の SML-01 と同じ周波数に設定された 2 つ目の無変調の SML-01 は CSA8000B をトリガーするのに使用します。大きなシングル・トーン変調による位相ノイズ、大きなガウス・ノイズ変調、小さなノイズ変調を解析します。いずれの場合も使用された信号発生器は Rohde & Schwarz SML-01 です。

代わりにオシロスコープ接続は、トリガーとサンプリング入力の両方に印加するために、広帯域抵抗性スプリッタを使用する事です。この方法は（人為的に低ノイズ測定結果を生ずる可能性のある）低周波数ノイズを除去します。

信号 1

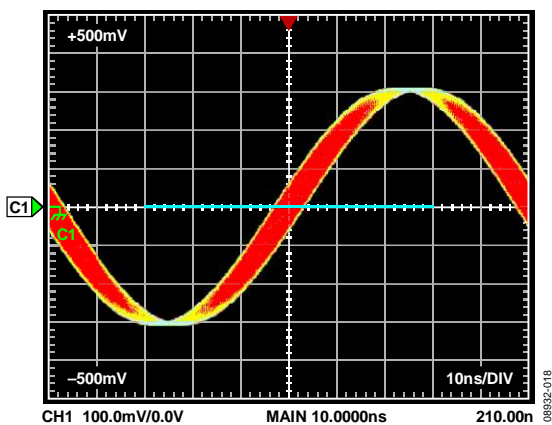


図 18.SML-01 の 10MHz 出力信号、101 kHz で 200mrad 変調

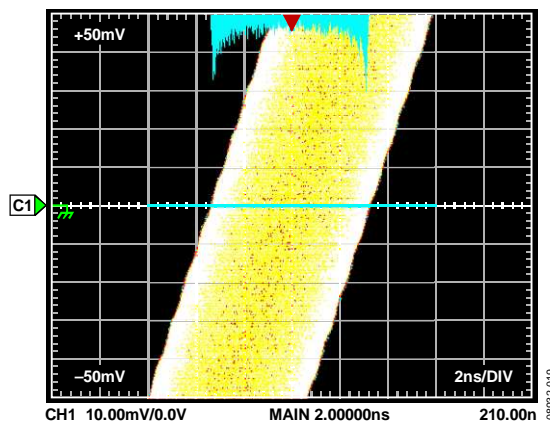


図 19.立ち上がりエッジの拡大図

立ち上がりエッジ断面での水平ヒストグラムをとり、2.218 ns 以内の標準偏差と 6.6 ns のピーク to ピーク偏差を表示します。

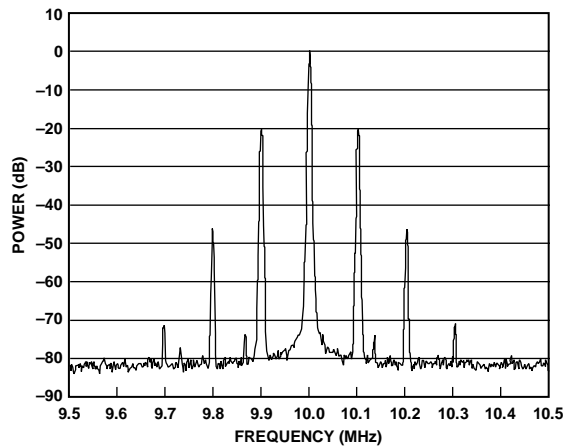


図 20.単一周波数の位相変調された周波数

スペクトラム・アナライザは明らかに単一周波数の位相変調によるスペクトルを示しています。キャリア周波数の右にある最初の項はベッセル係数 $J_1(\theta_d)$ です。 $J_1(\theta_d) \approx \theta_d/2$ なので、変調は 200 mrad と近似する事ができます。

信号 2

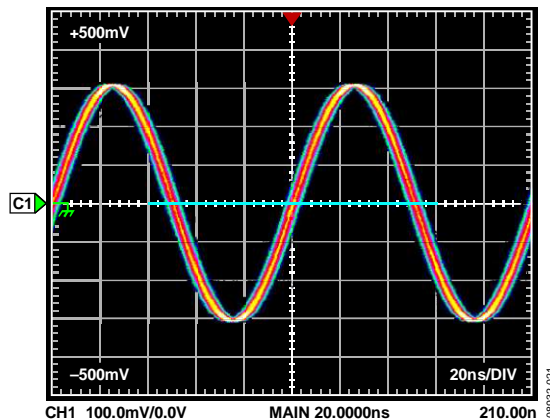


図 21.67 mrad RMS のガウス・ノイズで変調された 10MHz の SML-01 出力信号

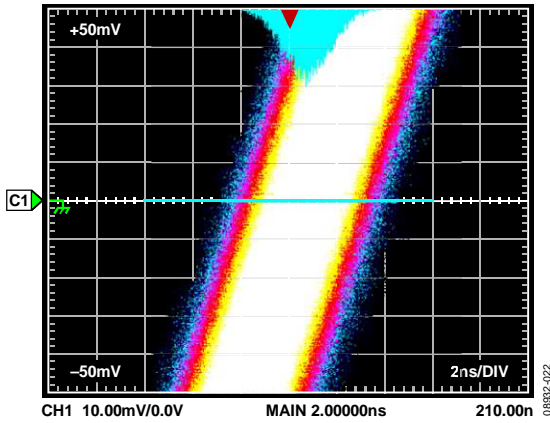


図 22.立ち上がりエッジの拡大図

立ち上がりエッジ断面での水平ヒストグラムは、1.005 ns 以内の標準偏差と 7.92 ns のピーク to ピーク偏差を表示します。オシロスコープのトリガー入力精度はスループレートが低くなると低下します。

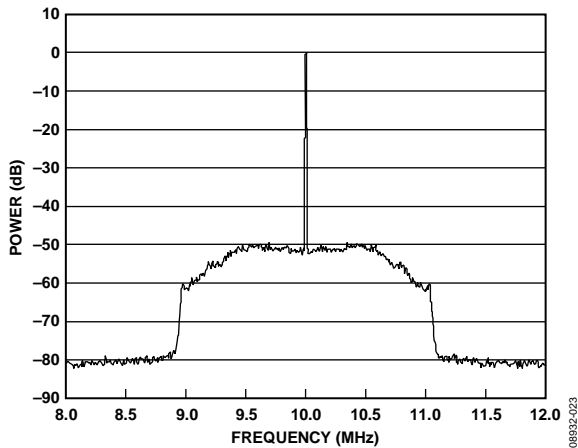


図 23.キャリアから 1 MHz までのノイズを含む 10 MHz 信号

図 23.図 23 はキャリアから 1 MHz までの広帯域ノイズに対するスペクトラムを示します。シングル・サイドバンド位相ノイズ測定を使い（式 19 参照）、計算された位相ノイズは 0.0676 ラジアン rms 振幅になり、これは約 1.075 ns の時間ジッタに相当します。

信号 3

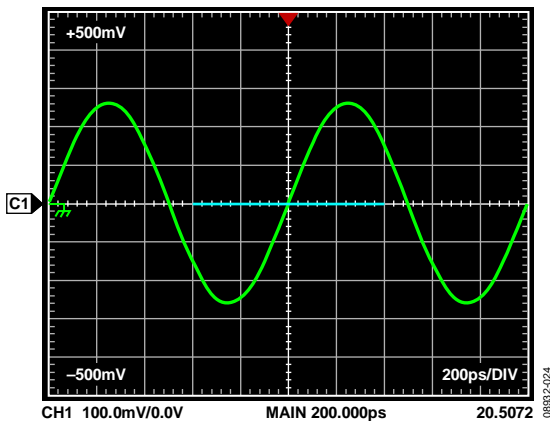


図 24.クリーンな 1 GHz を生成するように設定された SML-01

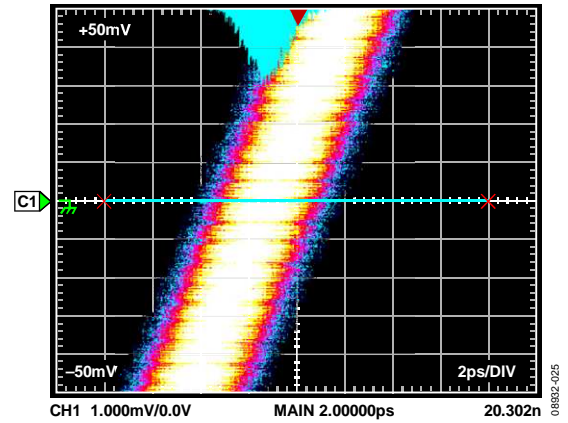


図 25.立ち上がりエッジの拡大図

この場合、偏差は非常に小さくオシロスコープのトリガ・ジッタ以下です。結果は標準偏差 837.3 fs でピーク to ピーク偏差 5.56 ps を示しています。

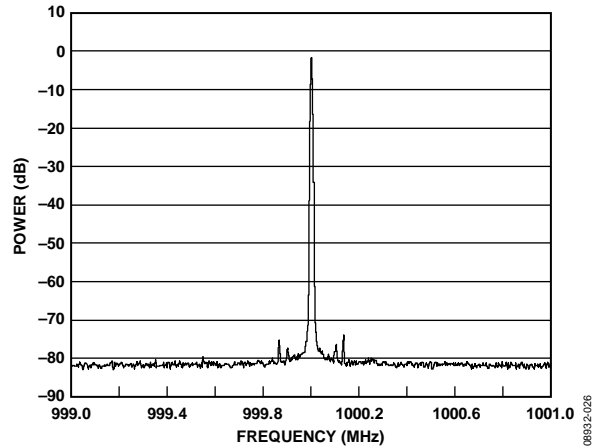


図 26.位相ノイズ 1.6 mrad RMS を含むフルスケール 1 GHz 信号

スペクトラム・アナライザは中心が 1 GHz で、スパンが 2 MHz に設定されています。周波数範囲を変える事によりダイナミック・レンジは広くすることはできますが、大きなキャリア信号はスパンから外れます。

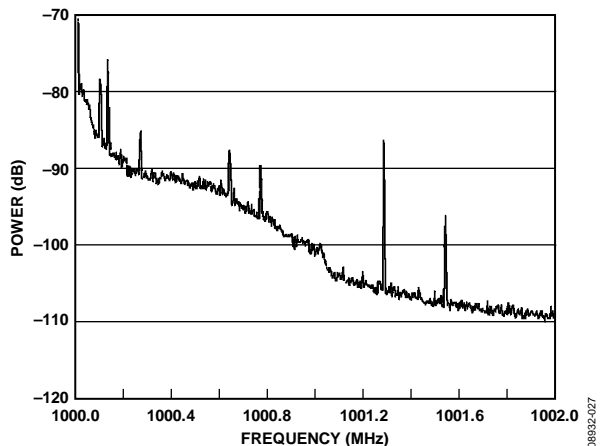


図 27.1.6mrad RMS 位相ノイズを含むシングル・サイドバンド 1 GHz 信号

キャリア信号から 5kHz の点から始まる範囲で図 27 は広帯域位相ノイズがキャリアから 1 MHz まである事を示しています。レファレンス・レベルが低過ぎると、図 27 に現れている歪みを生じます。正確な結果を得るには、測定をより狭い間隔で行う必要があります。キャリアの 10 kHz 以内での測定は入力 IF 段が過負荷にならないレファレンス・レベルでなければなりません。

シングル・サイドバンドの測定を使うと（式 19 参照）、位相ノイズは 1.6 mrad と測定されます。これは 255 fs に相当し、オシロスコープのトリガ・ジッタ分解能よりはるかに小さいです。

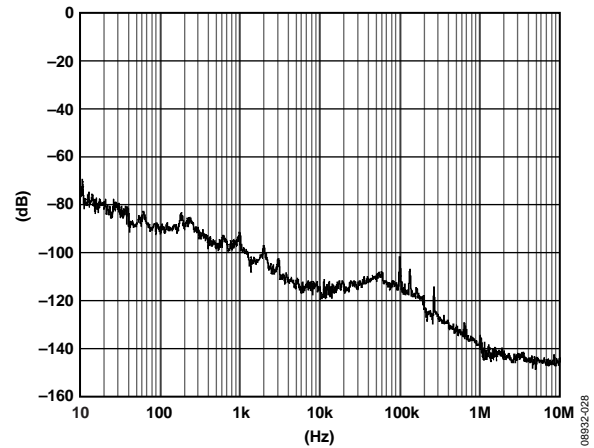


図 28. 1.6 mrad RMS 位相ノイズを含み非過負荷入力段のシングル・サイドバンド 1 GHz 信号

高速コンバータ

位相ノイズとジッタを AD9235 回路に導入しました。得られた結果をスペクトラム・アナライザで確認し、導き出した理論と相関をとりました。AD9235 はサンプル・クロック 65M で SNR 約 70 dBc を特徴とする高速 A/D コンバータです。実験は CTS5340 テスターで行われました。入力トーンとクロックの両方とも Rohde & Schwarz SMGU で生成しました。入力周波数は 2.4 MHz に設定しました。又クロック入力を 259.995 MHz に設定し、分周してサンプリング・レート $f_s \approx 65$ MSPS を生成しました。有効なサンプリング・レート $f_{es} \approx f_s/15$ を生成するため、サンプリング・レートをデシメーションしました。

回路は通常 70 dBc 程度の SNR になります。ビン 1827 に折り返される基本波を含む 4kFFT を使用した標準的な電力スペクトル密度を図 29 に示します。

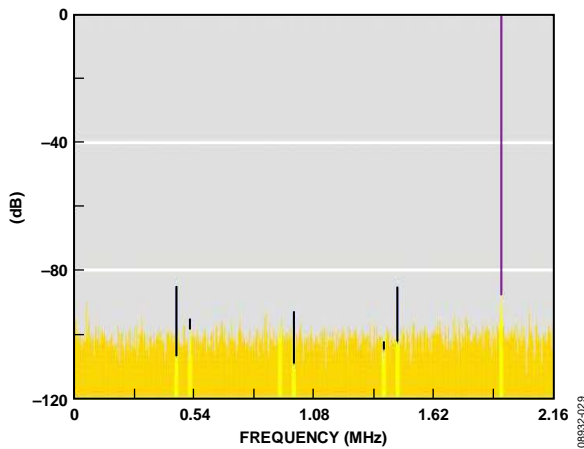


図 29. AD9235 ADC 回路の FFT、サンプル・レートを約 65 MSPS/15 にデシメーションし、入力周波数を 2.4 MHz に設定

信号 $\Phi(t) = 0.01 \sin 2\pi 10,000t$ で基本波を変調しました。得られた結果の電力スペクトル密度を図 30 に示します。

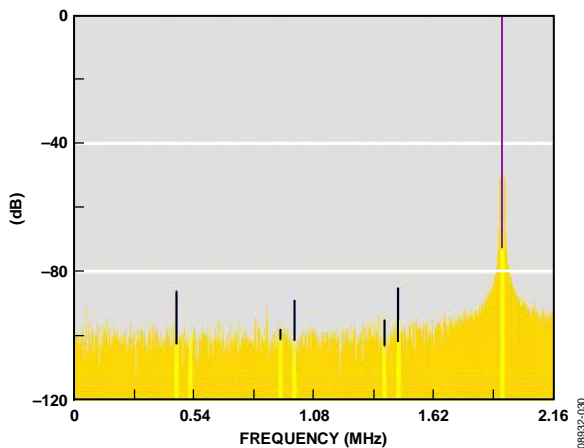


図 30. 基本波を 10 kHz トーンで変調した AD9235 ADC 回路の FFT

図 30 は基本波周辺で変調を意味する対称のピークを示します。FFT のビン幅は約 1057 Hz です。ビンを数えると、主なピークは基本波から 9 番目と 10 番目のビンに見つかりますが、これは 9.5 kHz と 10.5 kHz の間の変調を意味します。変調項は 10 kHz の直接の倍数或非ウインドの FFT ではないサンプリング・レートにより拡散されます。小さい信号の変調（変調ピークが 50 dBc 以上あるので安全な仮定です）の場合、最初の変調ベッセル項 $J_1(\theta_d)$ は約 $\theta_d/2$ です。変調項周辺の 8 つのもっとも高いピークの電力を合計して下記の値を得ます。

$$P_{J_1} \approx 2.0324 \times 10^{-5}$$

$$\theta_d/2 = \sqrt{P_{J_1}} \approx 0.0045$$

$$\theta_d = 0.009$$

たとえ変調項がスペクトル全体に広がっていても、ほとんどの変調エネルギーは $f_c \pm f_m$ 周辺中心になります。8 つの項を合計すれば実際の値の 10% 以内の近似値になります。

位相ノイズを加えた基本波の電力スペクトル密度を図 31 に示します。

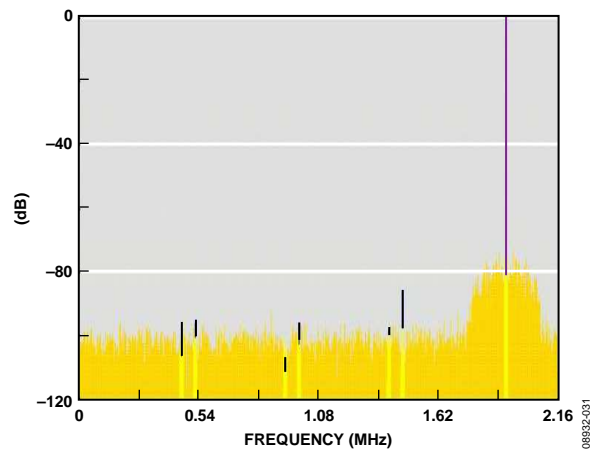


図 31. 基本波を変調する位相ノイズのある AD9235 ADC 回路の FFT

CTS5340 テスターはフィルタ処理した信号を回路基板に送ります。2.4 MHz フィルタの等価ノイズ帯域幅は約 300 kHz です。帯域制限されたノイズが基本波周辺にはっきりと見られますが、それは 2.4 MHz 入力トーン上の位相変調されたノイズです。位相ノイズにより SNR は 58 dBc となります。

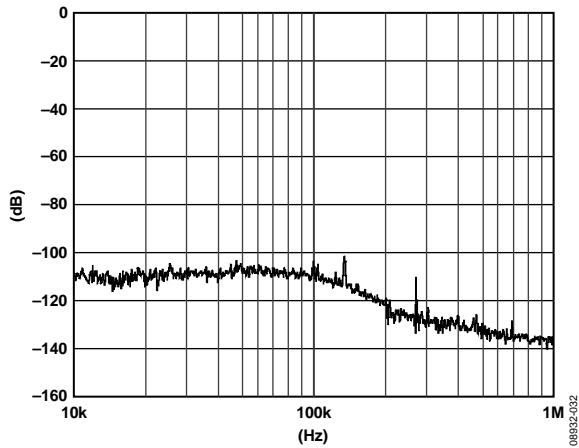


図 32.位相ノイズ 1.5 mrad を含む基本波の
シングル・サイドバンド・ノイズ・スペクトル

入力信号のシングル・サイドバンド測定は位相ノイズ
1.5 mrad を示します。

$$P_{rms} = A^2$$

$$P_{rms} = 2.25 \times 10^{-6} = -56.478 \text{ dB}$$

従って信号源位相ノイズは回路のテスト結果に一致します。

サンプリング・クロックに加えられたジッタの結果を図
33 に示します。

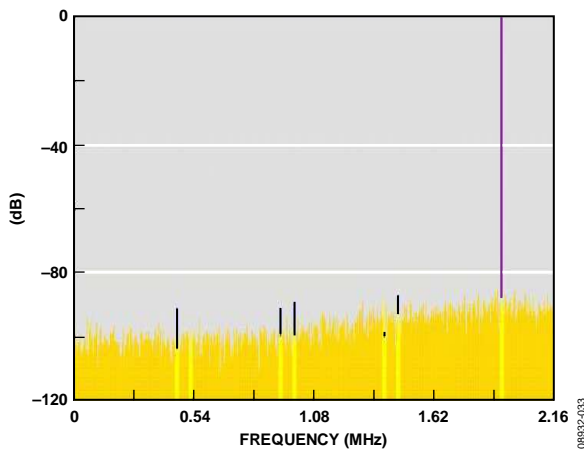


図 33.ジッタ・クロックでサンプリングした
AD9235ADC 回路の FFT

この場合電力スペクトル密度のノイズ・フロアは少し上昇
し SNR が 64 dBc になりました。クロック源は 259.995
MHz に設定された Rohde & Schwarz SML-01 です。
SML-01 クロック源のシングル・サイドバンド測定を図
34 に示します。

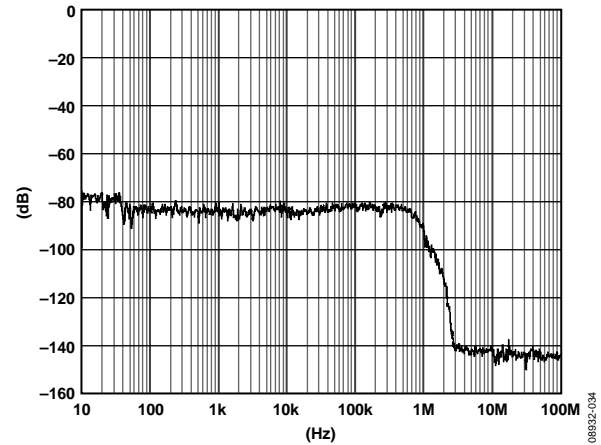


図 34.位相ノイズ

クロック源は 66.9 mrad の位相ノイズがあります。

$$A_{rms}^t = 0.0669 / (2\pi 259.995 \times 10^6) \\ \approx 40.953 \text{ ps}$$

サンプリング・クロックの位相ノイズは約 41 ps のクロック
時間ジッタに相当します。ジッタは 2.4 MHz 入力信号
上の位相ノイズ (ラジアン) に関連させる事ができます。

$$A_{rms}^t = (40.953 \times 10^{-12}) \times (2\pi 2.4 \times 10^6) \\ \approx 0.618 \text{ mrad}$$

41 ps のクロック・ジッタは 2.4 MHz 基本波上の位相ノイズ
0.618 mrad に相当します。

$$P_{rms} = A_{rms}^2$$

$$P_{rms} = 3.814 \times 10^{-7} = -64.187 \text{ dB}$$

サンプリング・クロック上のノイズは回路のテスト結果に
一致します。

結論

このアプリケーション・ノートに示した理論により位相ノイズとジッタ間の直接的な関係とそれらの周波数領域の表示が得られます。周波数領域で位相ノイズとジッタの解析を行うとノイズ信号の成分が強調されます。さらに、周波数領域での測定により、より高い周波数で高い分解能が得られます。

リファレンス

- Hewlett Packard.1998.Application Note 1303.Spectrum Analyzer Measurements and Noise.
- Manassewitsch, Vadim.1987.Frequency Synthesizers Theory and Design Third Edition.Wiley-Interscience.
- Norsworthy, Steven, Richard Schreier and Gabor Temes.1997.Delta-Sigma Data Converters Theory Design and Simulation.IEEE Press.
- Oppenheim, Alan and Ronald W. Schafer.1989.Discrete-Time Signal Processing.Prentice Hall.
- Papoulis, Athanasios.1984.Probability, Random Variables, and Stochastic Processes.McGraw-Hill.
- Rauscher, Christoph.2001.Fundamentals of Spectrum Analysis.Germany:Rohde & Schwarz.
- Tektronix.2009.XYZs of Oscilloscopes.Application Note.
- Tektronix.2001.Analyzing Clock Jitter Using Excel.Application Note.
- Tektronix.2004.Understanding and Performing Precise Jitter Analysis.Application Note.
- Tektronix.2000Automatic Measurement Algorithms and Methods for the 8000 Series Sampling Oscilloscopes.Application Note.
- van de Plassche, Rudy.1994.Integrated Analog-To-Digital and Digital-To-Analog Converters.The Netherlands:Kluwer Academic Publishers.
- Weisstein, Eric.1999.Concise Encyclopedia of Mathematics.Florida:CRC Press.

ノート

ノート

ノート