

ADC で 1Hz ノイズ電力密度を得るためのランダム・ビット発生回路と密度計算式
AD 変換で得られた値の 1Hz ノイズ絶対値の測定と計算

著者: 石井 聡

はじめに

これまで2冊の技術ノート (TNJ-077, TNJ-078) で ADC (Analog to Digital Converter) の NF について考えてきました。今回以降はさらにその続きとなる、「AD 変換結果で 1Hz ノイズ電力密度の絶対値をどうやって得るか」という話題に突入してみたいと思います。とくに今回の技術ノートでは、AD 変換結果を 1Hz ノイズ電力密度絶対値レベルへ実験的に校正する方法を示し、次の技術ノートでは AD 変換結果自体から 1Hz ノイズ電力密度絶対値レベルを直接計算する方法を示します。

その今回は、絶対基準器となるノイズ発生回路を作り、そのレベルを測定してみます。それでも測定のみ(場当たりの?)に依らずに、その 1Hz 電力密度を「パーセバルの定理 (Parseval's theorem)」[1]という理論ネタを用いて、理論的に導出してみたいと思います。この導出と結果は、他ではなかなか見ることのないご提供ネタに仕上がったのでは(実は次回の絶対レベル計算方法も、なのですが)、と勝手に思いあがっていました。しかしそれは、次の金木犀ネタとは真逆な意識であることに気づき、恥じてしまう私でありました…。

金木犀かおる秋、空高く

生まれてから今まで、毎年、この時期になると、濃密かつ高貴に香る小さく黄色い花が咲いていることに、多くのところで気づかされます。先日もウォーキングに出かけるとその香りがし、「ああ、ここにもあるんだな」と、なんだか理由もなくほっとする気持ちになりました。年齢を重ねるにしたがい、自然の、四季のうつろいへの感受が強まったのか、感受すべき、享受すべきと思うようになったのか、そのような四季の自然のワン・シーンにも気持ちが向くようになった気がします。



図 1. 満開の金木犀 (2020 年 秋)

この濃密かつ高貴に香る小さく黄色い花、それは金木犀 (きんもくせい)。金木犀の花の香りに誘われ、すがすがしい青い空を背景にその金木犀の写真を撮ってみました (図 1)。

ちょっと気になり、金木犀の花言葉を調べてみると「謙虚」[2]とあります。その素晴らしい香りに対して、花が小さく控えめだということが由来のようです。年齢を重ねるにしたがい、謙虚になれなくなりつつあるのかなと思うこの頃。もう一度、金木犀の花を見上げつつ、「謙虚…ねえ…」とその齢のところで立ち止まり、ひとり想いに耽って (ふけて) みるのでした。

校正基準となるノイズを発生させる PRBS デジタル回路

校正基準レベルとなるノイズを発生させる回路として PRBS デジタル回路を用います。PRBS は Pseudo Random Binary Sequence の頭文字をとったもので、疑似ランダム・パターンなどと日本語では呼ばれます。

ところで「疑似」、Pseudo はどのように発音するのでしょうか。私は「プシュード」と呼ぶものだど長く思っていました。「プセウドウ」なのかな?とも思っていました。しかし、あらためて調べてみると「スードウ」なんですね (ネット辞書は発音例もあるのでありがたいです)。P は発音しないのですね…。

さて、ここでは 16 ビットの PRBS を発生させるための「原始多項式」

$$P(x) = x^{16} + x^{15} + x^9 + x^4 \quad (1)$$

というものをを用います。これで構成された回路は、図 2 のように、フリップ・フロップを 16 個と、XOR を 3 個用いたものになります。

x のべき乗の指数に相当する順番のフリップ・フロップから信号を取り出し、それらを XOR して入力にフィードバックします。この回路を LFSR、Linear Feedback Shift Register と呼びます。これにより $2^{16}-1$ ビット、65535 ビットで繰り返す疑似ランダム・パターン、PRBS-16 を構成できます。

この回路を図 3 のような FPGA (Field Programmable Gate Array; といっても実際は CPLD; Complex Programmable Logic Device) に書き込みます。余談ですが、この基板は「CPLD キット」であり、相当前にネットで探して見つけ、欧州から直輸入したものです (って、このネット時代、そんなに大した行為ではありませんが)。CPLD や SOP の SRAM 以外は自分ではんだ付けしました (笑)。CPLD は電源投入時にプログラム書き込みなしに即動作するので、こんな実験用にはとても便利です。CPLD は Xilinx の XC95144 が使われています。144 マクロ・セルでは大したことでもできませんが…。

本題に戻しましょう (汗)。ここに 10 MHz のクロックを供給すれば、10 Mbps の PRBS-16 となり、10 MHz をヌル点 (谷) とした sinc 形状の広帯域なノイズ状のスペクトルが得られます。

アナログ・デバイセズ株式会社は、提供する情報が正確で信頼できるものであることを期していますが、その情報の利用に関して、あるいは利用によって生じる第三者の特許やその他の権利の侵害に関して一切の責任を負いません。また、アナログ・デバイセズ社の特許または特許の権利の使用を明示的または暗示的に許諾するものでもありません。仕様は、予告なく変更される場合があります。本紙記載の商標および登録商標は、それぞれの所有者の財産です。
©2021 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

Rev. 0

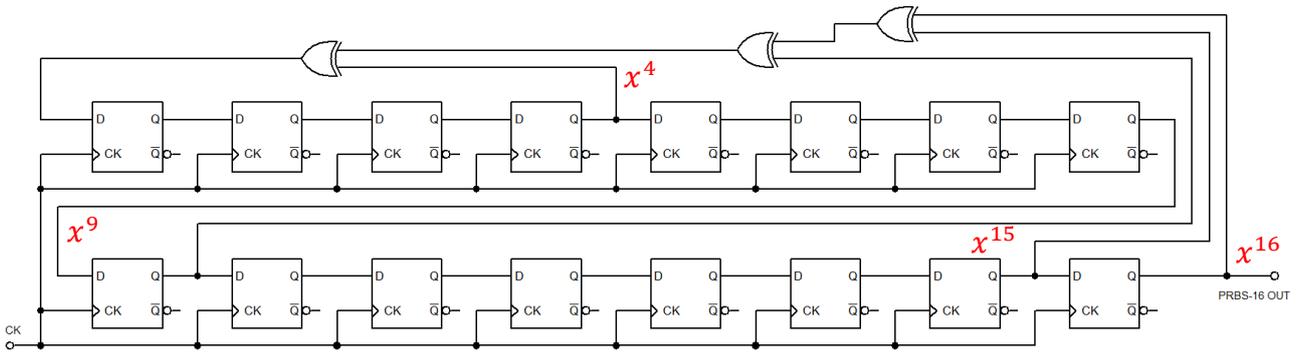


図 2. PRBS-16 を発生させる LFSR 回路

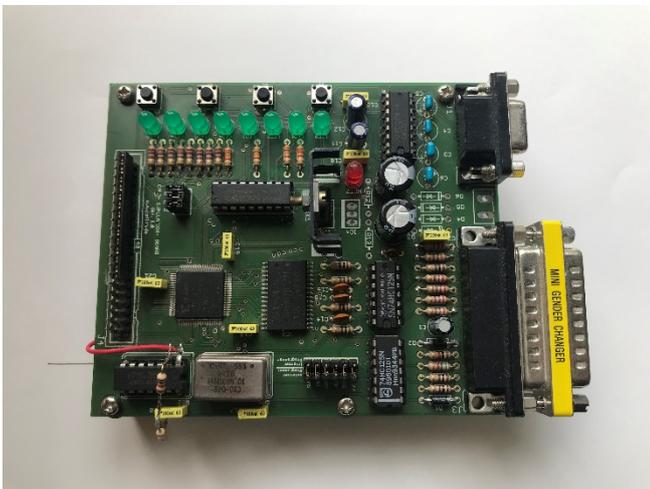


図 3. PRBS 疑似ノイズ信号を発生させる「欧州直輸入！(笑)」XC95144 CPLD 基板キット (いにしへの Win XP+パラレル・ポートで書き込みできる。JTAG 端子もあるが)

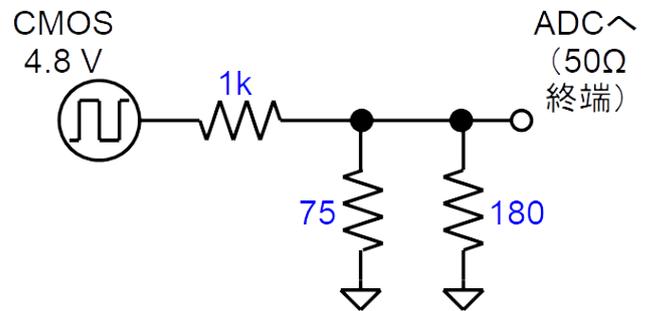


図 5. 出力回路

この回路で発生させた 10Mbps の PRBS-16 のスペクトルを図 4 に示します。このプロットはスパンが 50MHz であり、10MHz ステップでヌルができています。

この sinc 形状のスペクトルのうち、低域の周波数、たとえば 10Mbps に対して 1MHz 以下の周波数であれば、その周波数領域ではスペクトルが一定レベルの「ホワイト・ノイズ」とみなすことができます (疑似ノイズになります)。図 4 をご覧いただいても、1MHz は左から 2% のところであり、その領域はほぼフラットになっていることが分かりますね。

出力振幅レベルを求める (テブナンの定理の出番)

設計した回路は 5V CMOS ですが、実際に CMOS 出力の振幅レベルを実測してみると 4.8V でした。以降はこの数値、4.8V を用いて説明していきます。

この 4.8V の CMOS 出力を図 5 のように 1kΩ と 75Ω, 180Ω で分圧し、レベルを低下させるとともに、ADC である負荷側からこの回路を見たインピーダンスが 50Ω になるように構成しています。

ここでテブナンの定理を用いて、等価内部電圧源の大きさと出力抵抗の大きさを計算してみます。50Ω 負荷を接続しない条件での出力電圧は

$$V_{OUT_OPEN} = \frac{75//180}{1k + 75//180} 4.8V = \frac{52.94}{1k + 52.94} 4.8V = 241mV \quad (2)$$

出力抵抗は

$$R_{OUT} = \frac{1}{\frac{1}{1k} + \frac{1}{75} + \frac{1}{180}} = \frac{1}{0.0199} = 50.3\Omega \quad (3)$$

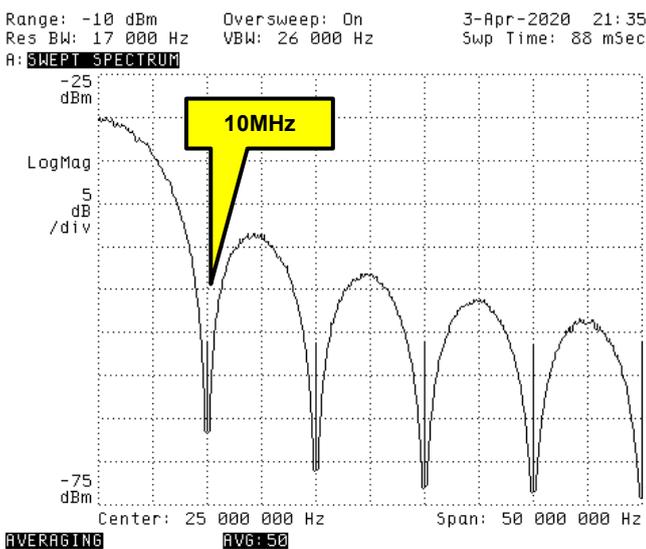


図 4. 10Mbps の PRBS-16 の sinc 形状スペクトル (スパン 50MHz)

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-079

これから図 6 のように図 5 の等価回路を得ることができます。ADC 側 (測定系側) ではこれを 50Ω で終端して受けます。このとき終端抵抗の端子電圧は、式(2)の半分の 120.5mV になります。

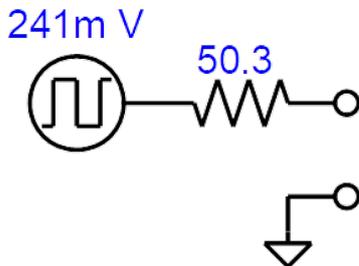


図 6. 図 5 の出力回路をテブナの定理で等価回路にしてみた

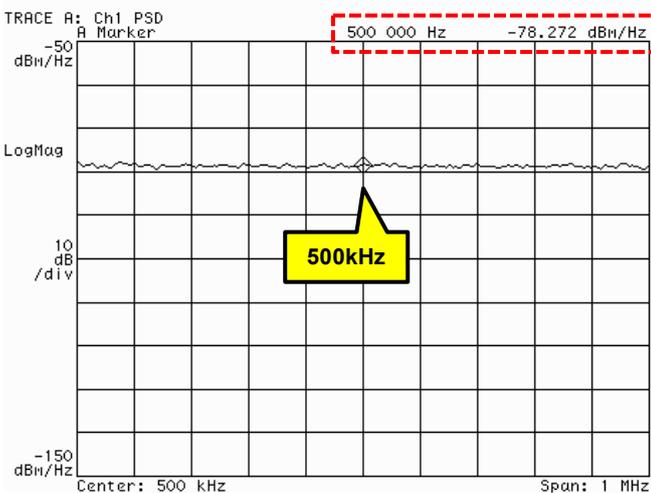


図 7. 89410A で PRBS 疑似ノイズ源 (図 5 の出力) の 500kHz での 1Hz 電力密度を測定してみた

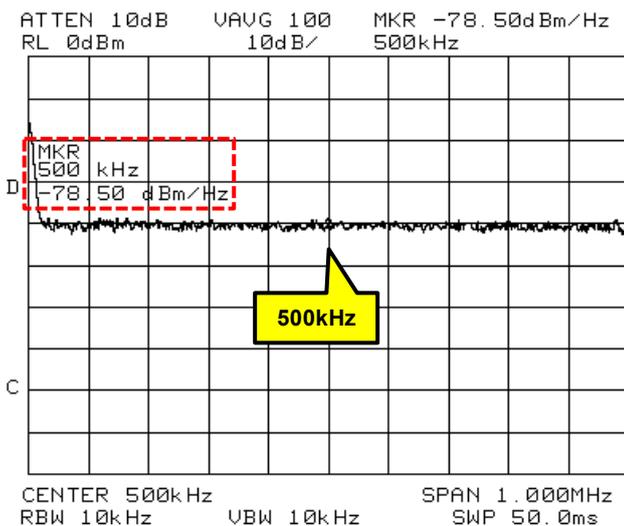


図 8. 8560B で PRBS 疑似ノイズ源 (図 5 の出力) の 500kHz での 1Hz 電力密度を測定してみた

PRBS-16 疑似ノイズの 1Hz 電力密度を得る

スペクトルを観測し 1Hz 電力密度レベルを測定してみる

実際に 2 種類のスペクトラム・アナライザで、PRBS-16 で発生させた疑似ノイズのノイズ 1Hz 電力密度を実測してみました。これは実測によりノイズ基準値を得るという考え方です。なお以降に示す、パーセバルの定理を使った理論値は -78.4dBm/Hz になります。

スペアナは 1Hz の電力密度を読み出すノイズ・マーカにし、100 回 rms 平均化を行っています。スペクトルが一定とみなせる低域の周波数 500kHz において、図 7 の 89410A では -78.3dBm/Hz 、図 8 の 8560B では -78.5dBm/Hz となっています。それぞれほとんど同じ値です。この測定値をもとに、任意の信号の AD 変換データを FFT した結果を 1Hz 密度電力として校正することができます。

なお、スペアナでのマーカ・リードアウトには誤差があるので注意してください (これも基準電力となる信号源を用意し、それと比較し校正しておくといいです)。

数式から PRBS-16 疑似ノイズの 1Hz 電力密度レベルを計算してみる

つづいて数式から PRBS-16 疑似ノイズ 1Hz 電力密度を求めてみましょう。この計算は「パーセバルの定理」を利用して導出したものです。

導出方法は以降に詳解しますので、ご興味あるかたはご覧ください。

さて、50Ω の負荷抵抗に $\pm 1\text{V}$ の矩形波、ビットレート B_R [bps] の PRBS 疑似ノイズが加わったとき、PRBS のスペクトルがフラットになる低域での、その 1Hz 電力密度 PSD は

$$PSD(1\text{V}) = 10 \log \left(\frac{40}{B_R} \right) \text{ dBm/Hz} \quad (4)$$

になります。実際の振幅ピーク・ツー・ピーク・レベルを S [Vp-p] とすると、1Hz 電力密度は、さきの $PSD(1\text{V})$ から

$$PSD(S [\text{V}]) = PSD(1\text{V}) + 20 \log \left(\frac{S}{2} \right) \text{ dBm/Hz} \quad (5)$$

として $20 \log (S/2)$ で補正されます。1/2 するのはピーク・ツー・ピークを $\pm x \text{ V}$ (バイポーラ) に直す (条件をそろえる) ためです。

この例ではビットレート $B_R = 10\text{Mbps}$ ですので、まず $\pm 1\text{V}$ の矩形波で考える $PSD(1\text{V})$ は式(4)から

$$PSD(1\text{V}) = 10 \log \left(\frac{40}{1\text{E}7} \right) = -54.0 \text{ dBm/Hz} \quad (6)$$

と計算できます。

図 5 の「1kΩ と 75Ω, 180Ω で分圧」した出力の実際の振幅レベルは、図 6 のように開放端で 241mVp-p、50Ω の負荷抵抗に加わった場合 (50Ω 終端の状態) で半分の 120.5mVp-p となり、この振幅レベルでの補正值は式(5)の第 2 項から

$$20 \log \left(\frac{0.1205}{2} \right) = -24.4\text{dB} \quad (7)$$

これで PRBS-16 疑似ノイズ源による 1Hz 電力密度基準レベルが得られた

結果として $-54.0 - 24.4 = -78.4\text{dBm/Hz}$ が得られます。これはさきの実測値とほぼ同じものですね。

これでスペクトラム・アナライザによる実測と式、それぞれで基準値となる PRBS-16 疑似ノイズ源によるノイズ 1Hz 電力密度基準レベルが得られました。この PRBS 疑似ノイズ源を測定し

たものが「-78.4dBm/Hz」だとして目的の信号の測定値を補正すれば、任意の信号の AD 変換データを FFT した結果を校正し、1Hz 密度電力を得ることができるわけです。

PRBS 疑似ノイズ源の信号を AD 変換/FFT した結果を校正してみる

それでは実際に PRBS 疑似ノイズ源出力を 50Ω 終端して、AD 変換したデータを FFT した値を校正してみましょう。これにより任意信号の 1Hz 密度電力も得ることができます。さきの PRBS-16 疑似ノイズ源を 50Ω 終端して、AD 変換しデータを取り込みます。

使用した ADC は、最高 5Msps、18 ビットの AD7960 [3]です。5Msps で 65536 ポイントのデータを取得しました。AD7960 をご紹介しておきましょう。

AD7960 18 ビット AD コンバータ、5 MSPS、差動入力、PULSAR®

<https://www.analog.com/jp/ad7960>

【概要】

AD7960 は、18 ビット、5Msps の電荷再配分式逐次比較型 (SAR) の A/D コンバータ (ADC) です。SAR アーキテクチャのため、ノイズと直線性の両方に関して並外れた性能が達成されています。AD7960 は、低消費、高速、18 ビットのサンプリング ADC、内部変換クロック、それに内部のリファレンス・バッファ回路を内蔵しています。(後略)

取得した 5Msps 65536 ポイントのデータにハン (Hann) 窓と呼ばれる窓関数をかけて、単純に FFT した結果が図 9 のプロットになります。

しかしこのプロットでは、レベル変動が -64 dB から -90 dB と、非常に大きいことが分かります。これでは「ノイズ 1 Hz 電力密度は一体幾つ？」という答えを得られるものになっていません。

FFT 処理で得られた答えがそのまま 1Hz 電力密度にはなっていない (だいぶ厄介だ…)

なお FFT というものは、その答えはそのまま 1Hz 密度にはなりません。次の技術ノートでそのあたりを (この ADC のノイズ 1Hz 電力密度の算出を例にして) 詳しく説明しますが、結構そこに辿りつくのは面倒なのです。

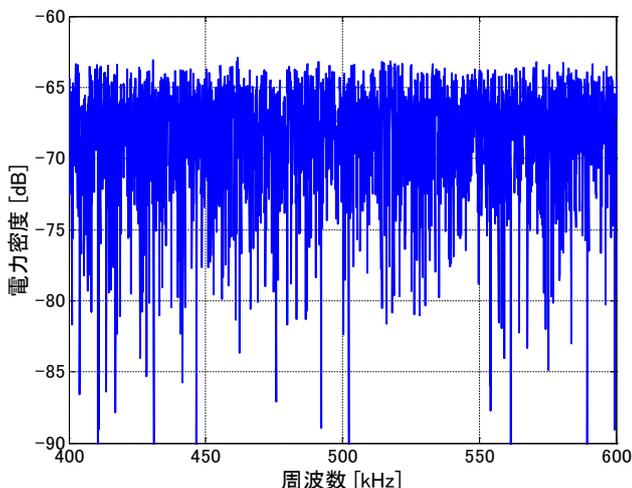


図 9. 窓関数をかけ単純に FFT してみた (レベル変動が大きい)

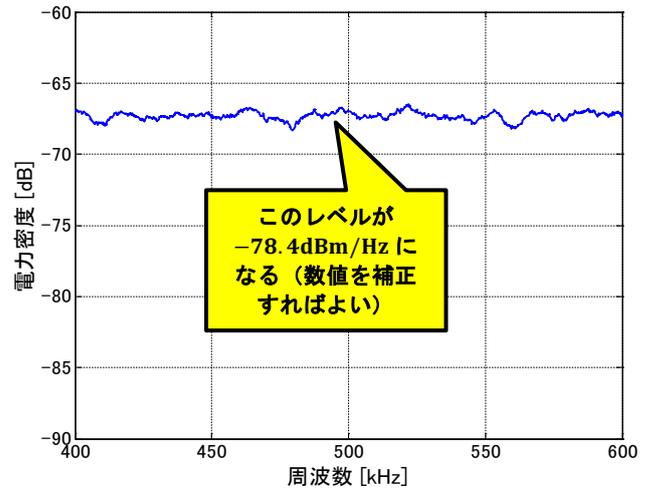


図 10. 100 ポイントで「電力密度」を移動平均してみた (レベル変動が低下)

ぱっと思い浮かぶことは「FFT 全長を 1sec にすればよいのでは？」ということですが、それだけでは上手くいきません。

算出は別途ご紹介するとして、ここではここまで得られた PRBS 疑似ノイズ源の密度電力の値を校正標準として、FFT 処理結果を校正してみます。

FFT 処理の結果を 1Hz 電力密度になるように校正すればよい

図 10 はこの FFT した結果を、「電力の足し算」つまり rms 平均化で 100 ポイント移動平均をしてみたものです。ここでの移動平均処理は、オール 1 の 100 タップの FIR (Finite Impulse Response) フィルタとの畳み込みで計算させています。MATLAB でこんな風に計算しています。

```
noisepowerbin = (abs(noisefft)).^2 / 50;
noisepowerbin = conv(noisepowerbin, ones(100, 1)) / 100;
```

ここで noisefft は単純に FFT した結果、noisepowerbin はそれを 50Ω の負荷抵抗に加わるエネルギーとしたもの、下の行はオール 1 の 100 タップの FIR フィルタと畳み込み計算をしたものです (得られた結果は数値数が増えるので数をそろえる必要があります)。いまだ若干の変動はありますが、レベル変動がかなり低下していることが分かります。

実測と計算で得られた PRBS 疑似ノイズ源による電力密度の値は -78.4 dBm/Hz でした。この PRBS 疑似ノイズ源を AD 変換し、FFT して移動平均した結果が -78.4 dBm/Hz に相当するのだとして、FFT 結果のレベルを校正すればよいのです。

以降で目的とした信号の 1Hz 電力密度を実測する場合には、ここで得られた校正値で数値を補正すればよいのです。

ここまででこの技術ノートの第一の目的は達成です。

AD 変換での折り返しの影響は？

前々回の TNJ-077、前回の TNJ-078 で広帯域に分布するノイズ成分が AD 変換により折り返され、1st Nyquist Zone (一般的に「ナイキスト帯域」と呼ばれるもの) に落ち込んでくる、というお話をしました。またアンチエイリアシング・フィルタを用意することで多くの場合は、その問題は表に出てこないとも説明しました。

今回の AD7960 ではこれはどう考えればよいのでしょうか。

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-079

PRBS-16のビットレートとAD7960のサンプル・レートがよい塩梅(あんばい)になっている

「あんばい」とは良い塩加減のことらしいですね(笑)。まあ、それはよしとして、今回の実験ではアンチエイリアシング・フィルタを用意していません。しかし実験結果が正しく理論値とあうのは理由があります。

PRBS-16のビットレートは10Mbpsで、図4のように10MHzのところにもヌルがあります。一方でAD7960のサンプリング・レートは5MHzであり、図4のPRBS-16のスペクトルは5MHzを中心に折り返されます。つまり測定している500kHzあたりの帯域では、PRBS-16の2nd Nyquist Zoneにある、10MHzのヌルの少し手前(9.5MHz付近)が折り返されることとなります。このレベルは十分に低く、本来の500kHzのスペクトルのレベルに影響を与えないようになっているのです。

PRBS-16のビットレートとADCのサンプル・レートが塩梅よくない場合は

いつもこのように塩梅よい条件に設定できるものではありません。これがうまく設定できない場合はアンチエイリアシング・フィルタを用意して、折り返しとなるスペクトルの周波数成分を除去する必要があります。

理論式の考え方(理論的背景)

上記で式(4)から式(7)にかけて1Hz電力密度レベルの計算方法を示しました。以降ではこの理論的背景を示してみます。

図11に示すような、10Mbps、1Vの矩形波1ビット「のみ」の孤立波をまず考えます。これを $s(t)$ として式で表すと

$$s(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 50\text{ns} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (8)$$

これをフーリエ変換(角周波数軸に変換)したものは

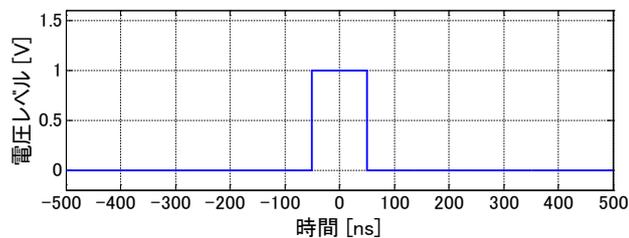


図11. 10Mbps 1Vの矩形波1ビット「のみ」の孤立波を考える

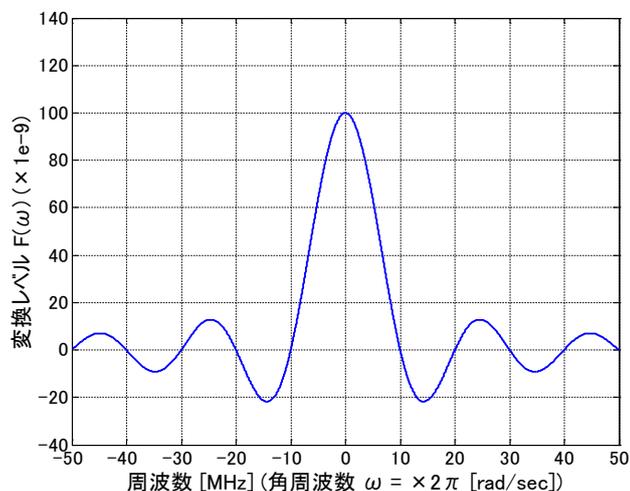


図12. 図11の10Mbps、1Vの矩形波1ビットの孤立波時間波形をフーリエ変換したもの

$$F(\omega) = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T} = 2T \text{sinc } \omega T \quad (9)$$

ここで ω は角周波数($\omega = 2\pi f$)、 T はパルス幅の1/2($T = 50\text{ns}$)です。これを図示すると図12となります(この図は周波数表現での表示)。ここで以下のようなパーセバルの定理(Parseval's theorem)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (10)$$

を用います。難しそうにも見えるのですが、「時間軸で見た1Ω負荷に加わる全エネルギー(単位時間内で信号が収まれば「電力」)は、周波数軸で見た全エネルギー(同じく「電力」と等しい)という、至極もつともと言える定理です。

また図11の矩形波は1ビットのみです。そこで生じるエネルギーは有限ですから、それが周波数軸で表されただけと考えれば腹落ち感があるものと思います。

さて、上記の式(10)の右辺は ω の関数なので、周波数 f として考えたいため、 $\omega = 2\pi f$ で置換積分してみます。まずこれを微分し

$$\frac{d}{df} \omega = 2\pi \quad (11)$$

を得ます。つづいて式(10)の右辺から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(2\pi f)|^2 \frac{d\omega}{df} df \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(2\pi f)|^2 2\pi df = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(2\pi f)|^2 df \end{aligned} \quad (12)$$

どうでもいい話ですが、角周波数 ω に関連して「係数 2π 」がこのような数式ではよくできます。しかし係数 2π はここでは消えてしまうため、「係数 2π 」とは人為的に考えられた「人造物」であり、自然界の振る舞いとしては「円周の一周は1」になっていることに気づかされます(笑)。

この計算は「自乗して電力相当値にして積分する」という考え方で、図13のイメージです。これから上式の左辺、右辺共々

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T} \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| 2T \frac{\sin 2\pi f T}{2\pi f T} \right|^2 df \quad (13)$$

と表されます。ここで考えるべきは「実際の信号スペクトルの500kHzの周波数における1Hz帯域」なので

$$f_{a-} = -500\text{kHz}, f_{a+} = +500\text{kHz}$$

とすれば、

$$(-500\text{kHz} - 1\text{Hz}) \sim (-500\text{kHz}) = (f_{a-} - 1) \sim (f_{a-})$$

の範囲と

$$(+500\text{kHz}) \sim (+500\text{kHz} + 1\text{Hz}) = (f_{a+}) \sim (f_{a+} + 1)$$

の範囲です。信号解析においてはプラス・マイナス両方の周波数で考える必要があるからです(図14に概念を示します)。

そうするとこの電圧レベル1V、10Mbps矩形波1ビットにより1Ωの負荷抵抗に生じるエネルギー・スペクトルの $f_{a\pm} = \pm 500\text{kHz}$ の1Hz帯域におけるエネルギー密度は

$$\begin{aligned} PSD(1V, \pm 500\text{kHz}, 1\Omega) &= 4T^2 \left(\int_{f_{a-}-1}^{f_{a-}} \left| \frac{\sin 2\pi f T}{2\pi f T} \right|^2 df \right. \\ &\quad \left. + \int_{f_{a+}}^{f_{a+}+1} \left| \frac{\sin 2\pi f T}{2\pi f T} \right|^2 df \right) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで当然ながら $\pm 500\text{kHz}$ とそこから1Hz離れた周波数の信号スペクトル・レベルは、図15のようにほぼ同じであり、たとえば $f_{a+} = +500\text{kHz}$ 、 $T = 50\text{ns}$ においてその大きさは

アナログ電子回路技術ノート

TNJ-079

$$\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT} = \frac{\sin(2\pi \cdot 5 \cdot 10^5 \times 5 \cdot 10^{-8})}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^5 \times 5 \cdot 10^{-8}}$$

$$= \frac{\sin(2\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3})}{2\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3}} \approx \frac{2\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 1 \quad (15)$$

f_{d-} も同様です。なお電圧レベルは 1V での計算です。先の積分式 [式(14)] から

$$PSD(1V, \pm 500kHz, 1\Omega)$$

$$= 4T^2 \left(\int_{f_{d-}-1}^{f_{d-}} |1|^2 df + \int_{f_{d+}}^{f_{d+}+1} |1|^2 df \right) = 8T^2 \quad (16)$$

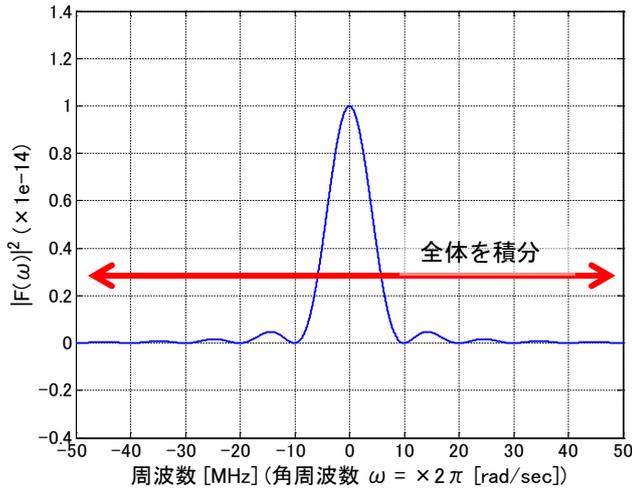


図 13. 周波数軸での値を自乗して電力相当値にして積分する計算のイメージ

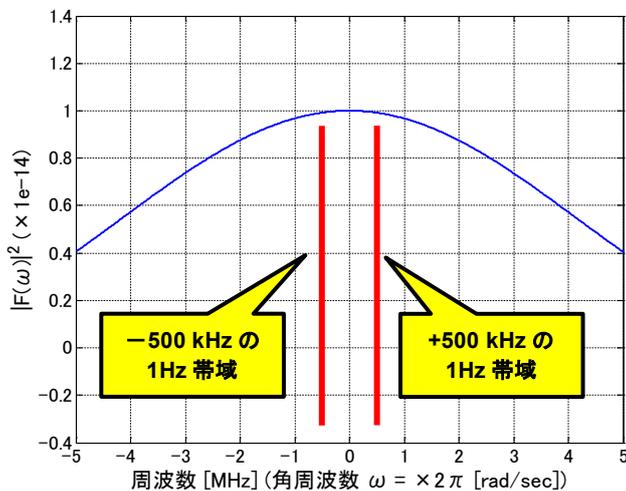


図 14. 信号解析においてはプラス・マイナス両方の周波数で考える必要があり、それぞれを自乗して足し算する

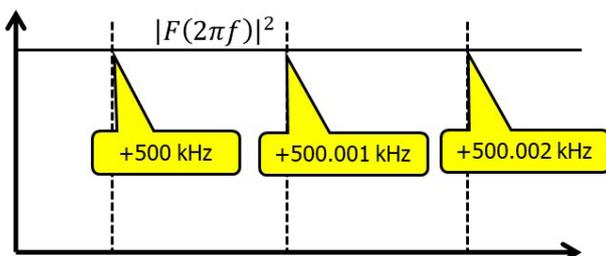


図 15. 500 kHz と 500.001 kHz はほぼ同じレベル

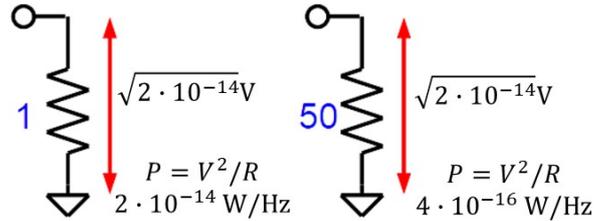


図 16. 1Ωの負荷抵抗に加わる端子電圧（左）が50Ωの負荷抵抗に同じ大きさで加わったときの電力量の考え方（1/50になる）

これから

$$PSD(1V, \pm 500kHz, 1\Omega) = 8T^2 = 2 \cdot 10^{-14} \text{ W/Hz} \quad (17)$$

これは 1Ωの負荷抵抗に生じる、パルス全長 10ns、1V 矩形波 1 ビット分の 1Hz 電力密度なので、50Ωの負荷抵抗では、電力計算の式

$$P = \frac{V^2}{R} \quad (18)$$

から、図 16 のように電力は 1/50 となり、

$$PSD(1V, \pm 500kHz, 50\Omega) = \frac{2 \cdot 10^{-14}}{50}$$

$$= 4 \cdot 10^{-16} \text{ W/Hz} \quad (19)$$

これを dBm/Hz に直すと -124dBm/Hz になります。これがパルス全長 10ns、1V 矩形波 1 ビット分の 500kHz における 1Hz 電力密度となります。1sec あたりの全電力は 10Mbit 分（1 千万ビット個数分）として

$$10 \log(10\text{Mbit}) = +70\text{dB} \quad (20)$$

となり

$$-124\text{dBm/Hz} + 70\text{dB} = -54\text{dBm/Hz} \quad (21)$$

が得られます。これが「50Ωの負荷抵抗に生じる、10Mbps（パルス全長 10ns）、0V-1V の PRBS 疑似ノイズ信号の 1Hz 電力密度」です。

ここから先は式(4)からの展開になるわけです。

PRBS 疑似ノイズ全体で孤立波の電力のビット数倍として計算できる理由は？

式(18)以降で、「パルス全長 10ns の単一パルス（孤立波）の電力を、そのまま一千万倍する」という説明をしました。ここで疑問が沸くのではないかと思います。それらは「PRBS は 0V と S [V]の間に変化するランダム信号だが、1 パルスの電力をそのまま 1 千万倍していいの？」「ビットが 0V のときが確率的に 50%あるが、ビットが 0V ならエネルギーは生じないはず。この 50%の率を考慮しなくていいの？」。また「振幅はどう考えるの？」というものかと思えます。

これはここまで検討を図 17 のように考えてきたからです。式(8)では、10Mbps、1V の矩形波 1 ビット「のみ」の孤立波 $s(t)$ としていました。連続ビット列として考えると、同図の上のように +1V と -1V の間に変化する電圧変化となります。これが式(4)になります。

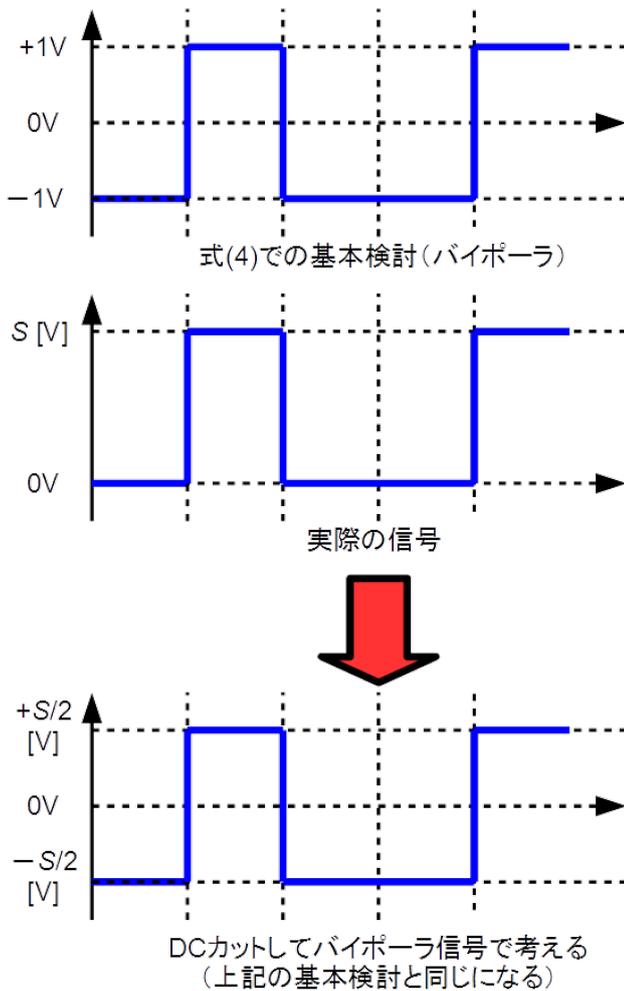


図 17. 式(4)での基本検討はバイポーラ信号と仮定しており、実際の信号も DC カットしてバイポーラ信号で考える

電圧が+1V のときの電力は V^2/R から $R = 1$ として考えると $1W$ であり、電圧が-1V のときの電力も (自乗されますから) $1W$ となり、全てのビットごとで式(17)に相当する電力が生じていることになります。

この定義から、「1V のパルスの電力をそのまま 1 千万倍」ということになるわけです。

つづいて実際のビット信号の振幅を考えます。式(5)の説明「実際の振幅ピーク・ツー・ピーク・レベルを $S [V_{p-p}]$ とする」を用いると、ビット信号は $0V$ と $S [V]$ の間を変化します (図 17 中央)。「ここではビットが $0V$ のときがあるじゃん」と思われるかもしれませんが、実際はこれを DC カットすれば、PRBS パターン信号がその振幅の中央を $0V$ として変化するようになります。それによりレベルが $+S/2 [V]$ と $-S/2 [V]$ の間を変化する電圧変化となります (図 17 下)。すなわち信号を「 $\pm S/2 [V]$ のバイポーラ信号」として考えており、そのため式(5)では $1/2$ の係数がかかっていることになるのです。

まとめ

150 円のりんご 1 個と 180 円のレモン 1 個を買えば、支払額は 330 円です。 $150 + 180 = 330$ と式では書けます。実際と数式は当然ながら等しくなります。

しかし PRBS 信号源から発生させた、振る舞いのよく分からないノイズの電力 (1Hz 密度) を実測してみて、それと計算式とのつじつまを合わせることは、「きちんと合うのかな？」とはじめはかなりの不安がありました。

しかしパーセバルの定理を使うと、コンマ dB のオーダーまできちんと合うことに、書いている本人としても驚きを隠しませんでした。いつものとおり、考えながら執筆する WEB ラボ (というか、その前にアナログ技術セミナーのネタとして考えていたのですが) なのでありました。

今回は、今回のような既知の PRBS 疑似ノイズ信号源を測定した実測結果を基準にする、という現場のアプローチではなく、FFT した結果からそのまま 1Hz 電力密度を求めるといって、より高尚 (?) な展開に突入してみたいと思います。そこでもちゃんと答えが出たのですが、その検討結果はさらに 2 冊の技術ノートを生むという、細胞分裂的に探究が進んでいくストーリーをも生み出したのでした…。

参考文献

- [1] パーセバルの定理, Wikipedia, <https://ja.wikipedia.org/wiki/パーセバルの定理>
- [2] キンモクセイの花言葉; <https://hananokotoba.com/kinmokusei/>
- [3] AD7960 Datasheet, Analog Devices