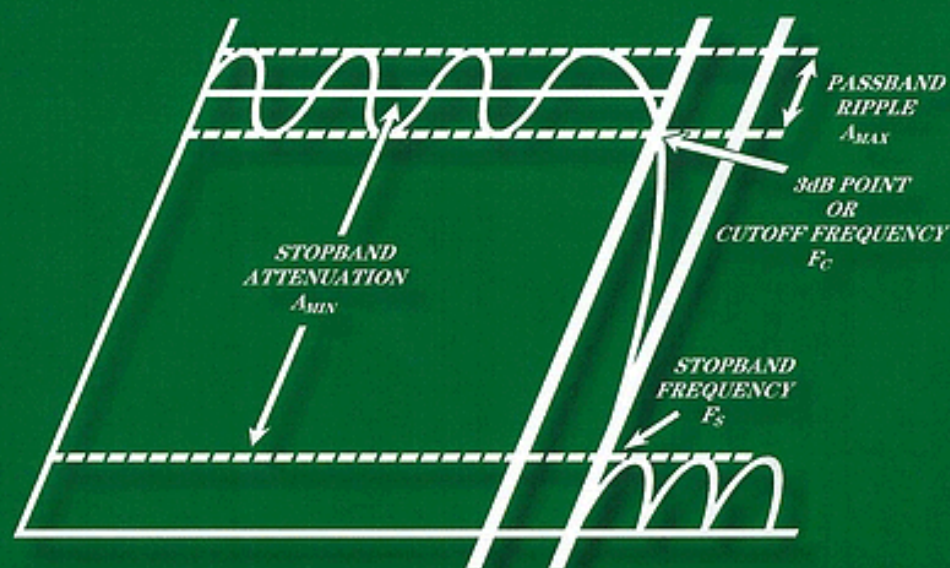


# OPアンプによる フィルタ回路の設計

## OPアンプ大全 第3巻

ANALOG DEVICES アナログ・デバイス 著  
電子回路技術研究会 訳



# OPアンプによる フィルタ回路の設計

## OPアンプ大全 (第3巻)

 ANALOG  
DEVICES アナログ・デバイセズ 著  
電子回路技術研究会 訳

本書は下記の出版物を著作権者の許諾に基づいて全5巻に分けて日本語訳したものです。

Op Amp Applications

Copyright © 2002 By Analog Devices, Inc.

Original : Printed in the United States of America (ISBN 0-916550-26-5)

All rights reserved. This book, or parts thereof, must not be reproduced in any form without permission of the copyright owner. Information furnished by Analog Devices, Inc. is believed to be accurate and reliable. However, no responsibility is assumed by Analog Devices, Inc. for its use.

Analog Devices, Inc. makes no representation that the interconnections of its circuits as described herein will not infringe on existing or future patent rights, nor do the descriptions contained herein imply the granting of licenses to make, use, sell equipment constructed in accordance therewith. Specifications are subject to change without notice.

## 謝 辞

本書のような規模の書籍は、多くの人々の協力がなければ完成させることはできません。この“Op Amp Applications”の編纂を通して、多大の貢献、協力を提供してくれた以下の方々に、心からの謝意をおくります。

まず、このプログラムの推進を励まし、助力してくれたアナログ・デバイセズ社 (ADI) にお礼を述べたいと思います。

次に、ADI セントラル・アプリケーション・グループのウォルト・ケスター氏に深く感謝いたします。かれは、ADI での長年にわたるセミナーノート編纂に携わった経験による、多くの知識や助言を惜しみなく提供してくれました。本書の材料となる資料の著者である、ケスター氏とそのグループの方々に感謝いたします。

同じく、多くのコメントや書評を寄せていただいた、ADI フィールド・エンジニアリング・グループとセントラル・アプリケーション・グループのスタッフにお礼を申し上げます。エド・グロカススキ氏、ブルース・ホームマン氏、ボブ・マーウィン氏、そしてアーノルド・ウィリアムズ氏には、多くの有用なコメントをいただきました。加えて、かつて ADI 社のアプリケーション・エンジニアであったウェス・フリーマン氏には、ほとんどの原稿に目を通していただき、有益なフィードバックをいただきました。

ADI 社のダン・シャインゴールド氏には、特に感謝の意を示したいと思います。氏は、本書の内容に対する数え切れないほどの指摘や書評を提供してくれただけでなく、氏が真空管 OP アンプ時代に過ごしたジョージ・A・フィルブリック・リサーチ社 (GAP/R) の頃からの長年にわたる経験をもとにした、多くの示唆にとんだ見識を示してくれました。

このほか、それぞれのセクションの最後に特記してある、個別のコメントなどを提供してくださった多くの協力者の皆さんに感謝します。

ジュディス・ドーヴィル女史には、索引の作成および原稿に対する多くの助言をいただき、感謝しています。

最後に、スライドの準備、タイピング、文章スタイルのデザイン等を行ってくれた W<sup>2</sup> グラフィックス社に感謝いたします。

ウォルト・ユング (Walt Jung), 2002 年 8 月  
Analog Devices Inc. Central Applications Department.

## まえがき

「OP アンプ大全 (全5巻)」の4冊目として第3巻「OP アンプによるフィルタ回路の設計」を上梓する運びとなりました。1冊目の第1巻では、OP アンプの歴史や過去から現在に至る基本技術を解説し、2冊目の第5巻では、周辺回路技術や実装方法などを解説。さらに3冊目の第2巻では、OP アンプを使ったさまざまな応用回路をその動作原理とともに解説し、エンジニアの方々が日々の業務のなかですぐに使える実用書となっていました。今回の第3巻は、第2巻の内容を引き継ぎ、OP アンプの応用回路としてもっともよく使われているフィルタ回路の基礎から設計手法、そして実際の回路例まで解説されています。

アナログ・デバイセズ社の発行する原著“Op Amp Applications”では、全1000ページのうち、このフィルタ設計の章 (Chapter-5 Analog Filters) だけで約130ページものページ数、つまり全ページの約1割弱が割り当てられ、フィルタがいかにOP アンプの応用回路として重要な地位を占めているかがわかります。

それでは簡単に第3巻の内容をご紹介します。まず、電子回路におけるフィルタとは何か…という解説に始まり、フィルタを設計するうえで知っておかなければならない言葉の定義 (Q, カットオフ周波数, パスバンド, ストップバンド, パスバンド・リプルなど) の解説と、フィルタの特性を理解するうえで必要不可欠な「伝達関数」の概念が述べられています。「伝達関数」を解説している章では、一般的なフィルタの解説書で述べられている周波数領域における「周波数特性」および「位相特性」のほかに、「時間領域」における「ステップ応答」および「インパルス応答」に関する解説もあります。「時間領域」に関する解説は、高速シリアル信号電送など「シグナル・インテグリティ」を問題にする回路にフィルタを適用した場合に、波形がフィルタの特性によってどのように変化するのかを理解するために非常に役に立ちます。

また、代表的な各種フィルタ (バターワース, チェビシェフ, ベッセル, 楕円, 逆チェビシェフ) の周波数特性, 位相特性と, ステップ応答, インパルス応答の図表も掲載され、フィルタの特性を直感的に理解できるよう配慮されています。さらに、実際のフィルタを設計するためのデザイン・テーブル (設計表) も用意されています。

これらの基礎的な解説を受け、後半ではすべてのフィルタ設計の基本となるローパス・フィルタ特性 (原著ではローパス・プロトタイプと呼んでいる) から、ハイパス・フィルタ, バンドパス・フィルタ, バンドリジエクト (ノッチ) ・フィルタ, オールパス・フィルタへの変換方法の解説が、デザイン・テーブルに記載されている数値を元に計算する実例とともに解説されています。さらに、実際にOP アンプを使って各種フィルタを設計する際の代表的な回路例が豊富に掲載され、それぞれの回路における抵抗やコンデンサの値

の決めかたも解説されています。この章の最後の十数ページには、ここまで解説された各種フィルタ回路が一覧としてわかりやすくまとめられています。

続く章では、実際にOPアンプを使ったフィルタ回路を設計するうえで問題となる、受動素子の誤差や温度係数に関して注意すべき事柄を、具体的な抵抗、コンデンサの名称を挙げながら解説しています。また、OPアンプを使ったフィルタの性能限界に関しても言及しています。最後の章では、それまでの解説の集大成として、A-Dコンバータの前に設置するアンチエイリアシング・フィルタの設計法を含む六つの実例を挙げ、それらの回路の設計過程が書かれています。

このように、本書はOPアンプを使ったフィルタ設計の実用書として必要かつ十分な内容が網羅されており、これからOPアンプを使ったフィルタ設計に臨むエンジニアの方々のみならず、これまで多くのフィルタ設計に携わってきたエンジニアの方々にも有用と思います。

私もOPアンプを使ったフィルタ設計の経験がありますが、翻訳にあたって最初に原著を読んだとき、フィルタに関する基本的な事柄を完全に理解できていなかったことに愕然とし、米国のアナログ・デバイセス社に在籍する著者に電子メールを打ち、教えを請いながらの翻訳作業でした。著者のメールによるていねいな解説にうなずきながらも、どうやったら読者にわかりやすい日本語になるだろうか…と格闘する日々が続きました。

最後に、訳者が出した山のような質問メールにていねいかつ的確な回答を寄せていただいた原著の著者Hank Zumbahlen氏と、挫折しそうになった私を叱咤激励し、辛抱強く翻訳原稿を待っていただいたCQ出版社の清水当氏に感謝の意を表したいと思います。

訳者代表：國頭 延行

#### ▶ OPアンプ大全(全5巻)の構成と原著との対応

- |     |     |    |             |                                      |
|-----|-----|----|-------------|--------------------------------------|
| 第1巻 | 第1部 | …… | Chapter - H | Op Amp History                       |
|     | 第2部 | …… | Chapter - 1 | Op Amp Basics                        |
| 第2巻 | 第3部 | …… | Chapter - 2 | Specialty Amplifiers                 |
|     | 第4部 | …… | Chapter - 3 | Using Op Amps with Data Converters   |
|     | 第5部 | …… | Chapter - 4 | Sensor Signal Conditioning           |
| 第3巻 | 第6部 | …… | Chapter - 5 | Analog Filters                       |
| 第4巻 | 第7部 | …… | Chapter - 6 | Signal Amplifiers                    |
| 第5巻 | 第8部 | …… | Chapter - 7 | Hardware and Housekeeping Techniques |

## 目次

## 第6部 アナログ・フィルタ

|            |                                                                       |           |
|------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>第1章</b> | <b>イントロダクション</b>                                                      | <b>11</b> |
| <b>第2章</b> | <b>フィルタの伝達関数</b>                                                      | <b>15</b> |
| 2-1        | $s$ 平面                                                                | 15        |
| 2-2        | $f_0$ と $Q$                                                           | 17        |
|            | ●ローパス・フィルタ (lowpass filter ; LPF)                                     | 17        |
|            | ●ハイパス・フィルタ (highpass filter ; HPF)                                    | 19        |
|            | ●バンドパス・フィルタ (bandpass filter ; BPF)                                   | 19        |
|            | ●バンドリジェクト・フィルタ (bandreject filter ; BRF) /<br>ノッチ・フィルタ (notch filter) | 21        |
|            | ●オールパス・フィルタ (allpass filter ; APF)                                    | 23        |
| 2-3        | 位相の応答特性                                                               | 24        |
|            | ●位相非直線性の影響                                                            | 27        |
| <b>第3章</b> | <b>時間領域の応答特性</b>                                                      | <b>29</b> |
| 3-1        | インパルス応答                                                               | 29        |
| 3-2        | ステップ応答                                                                | 31        |
| <b>第4章</b> | <b>代表的なフィルタの応答特性</b>                                                  | <b>33</b> |
| 4-1        | 全極型のフィルタ特性                                                            | 33        |
|            | ●バターワース特性                                                             | 33        |
|            | ●チェビシェフ特性                                                             | 34        |
|            | ●ベッセル特性                                                               | 35        |
|            | ●等リプル誤差をもつ線形位相フィルタ (ベッセル・フィルタの一種)                                     | 36        |
|            | ●トランジショナル・フィルタ<br>(ベッセルまたはガウシアン・フィルタの一種)                              | 37        |
|            | ●全極型伝達関数をもつフィルタの比較                                                    | 38        |
| 4-2        | 伝達関数にゼロをもつフィルタ特性                                                      | 39        |
|            | ●楕円関数フィルタ                                                             | 39        |



|                         |    |
|-------------------------|----|
| ●チェビシェフ特性の阻止域をもちながら     |    |
| 遅延特性が最大限平坦な楕円関数フィルタ     | 41 |
| ●逆チェビシェフ・フィルタ           | 42 |
| 4-3 プロトタイプ・ローパス応答特性の使用法 | 43 |

## 第5章 フィルタの特性の変換

79

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 5-1 ローパスからハイパスへの変換          | 79 |
| 5-2 ローパスからバンドパスへの変換         | 81 |
| 5-3 ローパスからバンドリジエクト(ノッチ)への変換 | 84 |
| 5-4 ローパスからオールパスへの変換         | 87 |

## 第6章 各種フィルタの設計方法

89

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 6-1 フィルタを実現するための構成要素         | 90  |
| ●抵抗とコンデンサの組み合わせで実現する         |     |
| シングル・ポール・セクション               | 90  |
| ●コイルとコンデンサで構成するパッシブ・セクション    | 91  |
| ●積分回路                        | 95  |
| ●汎用インピーダンス変換器(GIC)           | 95  |
| ●アクティブ・インダクタ                 | 95  |
| ●周波数依存型負性抵抗(FDNR)            | 97  |
| 6-2 サレン・キー回路                 | 99  |
| 6-3 多重帰還型フィルタ                | 102 |
| 6-4 状態変数型フィルタ                | 104 |
| 6-5 バイクワッド・フィルタ              | 106 |
| 6-6 デュアルアンプ・バンドパス・フィルタ(DABP) | 107 |
| 6-7 ツインT型ノッチ・フィルタ            | 108 |
| 6-8 バインター・ノッチ・フィルタ           | 109 |
| 6-9 ボクター・ノッチ・フィルタ            | 110 |
| 6-10 1-バンドパス型ノッチ・フィルタ        | 111 |

## 目 次

## 第 6 部 アナログ・フィルタ



|                 |     |
|-----------------|-----|
| 6-11 オールパス・フィルタ | 113 |
| ● 1 次オールパス・フィルタ | 113 |
| ● 2 次オールパス・フィルタ | 113 |

## 第 7 章 フィルタ実装上の問題点 135

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 7-1 受動部品 (抵抗, コンデンサ, コイル) | 135 |
| 7-2 能動素子 (OP アンプ) の制約     | 140 |
| ● 入力容量の変化による歪み            | 142 |

## 第 8 章 フィルタ設計の具体例 147

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 8-1 アンチエイリアス・フィルタ       | 147 |
| ● フィルタ次数の決定             | 147 |
| ● パッシブ・フィルタによる実現例       | 148 |
| ● サレン・キー型による実現例         | 150 |
| ● 多重帰還型による実現例           | 151 |
| ● 状態変数型による実現例           | 151 |
| ● FDNR 型フィルタによる実現例      | 152 |
| ● 素子の値とフィルタ特性           | 152 |
| 8-2 フィルタの変換             | 154 |
| ● ハイパス・フィルタへの変換例        | 155 |
| ● バンドパス・フィルタへの変換例       | 156 |
| ● バンドリジエクト・フィルタへの変換例    | 158 |
| 8-3 音楽 CD 用再構成フィルタ      | 160 |
| 8-4 デジタル制御が可能な状態変数型フィルタ | 164 |
| 8-5 60 Hz ノッチ・フィルタ      | 169 |

|         |     |
|---------|-----|
| 本書の参考文献 | 170 |
|---------|-----|

|    |     |
|----|-----|
| 索引 | 172 |
|----|-----|

OPアンプ大全 **第6部**  
**アナログ・フィルタ**  
Chapter-5 Analog Filters

|               |     |
|---------------|-----|
| イントロダクション     | 11  |
| フィルタの伝達関数     | 15  |
| 時間領域の応答特性     | 29  |
| 代表的なフィルタの応答特性 | 33  |
| フィルタの特性の変換    | 79  |
| 各種フィルタの設計方法   | 89  |
| フィルタ実装上の問題点   | 135 |
| フィルタ設計の具体例    | 147 |

## 第 1 章

# イントロダクション

Hank Zumbahlen / 訳：藤森弘己

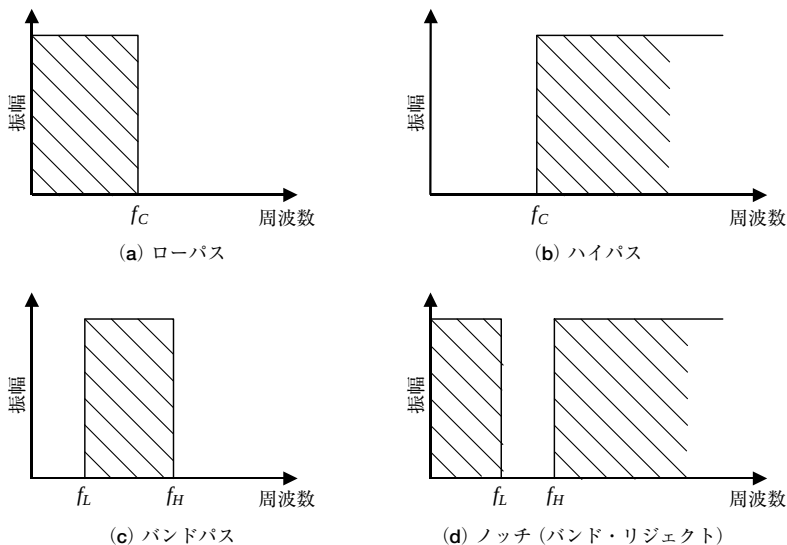
フィルタ (filter) は、信号に対して周波数に関わる処理を行うネットワークです。フィルタの基本的概念は、インダクタンス (誘導成分) やキャパシタンス (容量成分) によるインピーダンスが、周波数に応じてどのようにふるまうかを検証することにより説明できます。たとえば、シャント側が誘導性 (リアクティブ素子) である分圧器を考えてみます。周波数が変わればそれに連れてリアクティブ・インピーダンスも変化し、分圧器の比率も変化します。このメカニズムは周波数変化に起因する入出力の伝達特性の変化を引き起こし、これは周波数レスポンス (周波数応答) として規定されます。

フィルタには、多くの実用上のアプリケーションがあります。たとえば、簡単なシングル・ポール (単極) のローパス・フィルタ (積分器) は、しばしばアンプの高域ロールオフ特性での位相シフトによる発振を安定化するために用いられます。また、やはりシングル・ポールのハイパス・フィルタは、ゲインの高い回路や片電源回路において DC 成分を取り除くために使用されます。

この例を無線受信機の中に見ることができ、必要とする信号帯域を通過させて増幅し、それ以外を減衰させる動作をしています。またデータ・コンバータ回路では、A-D コンバータ・システムにおいてエイリアシング (信号の折り返し) の影響を抑えるために用いられています。あるいは、D-A コンバータによる波形再生システムでは、広帯域の不要成分、たとえばサンプリング・クロックやその歪み成分、出力波形の平滑化などのために、フィルタが使われています。

フィルタ理論に関しては数多くの参考文献がありますが、ここでは数学的な訴求であるラプラス変換や複素数による極の計算などのもろもろのことは必要最小限にとどめることにし、深くは取り上げません。これらはフィルタの効果や、安定性の検証について説明するには適切ですが、多くの場合はその周波数領域における機能の検証のほうがよりわかりやすいものです。

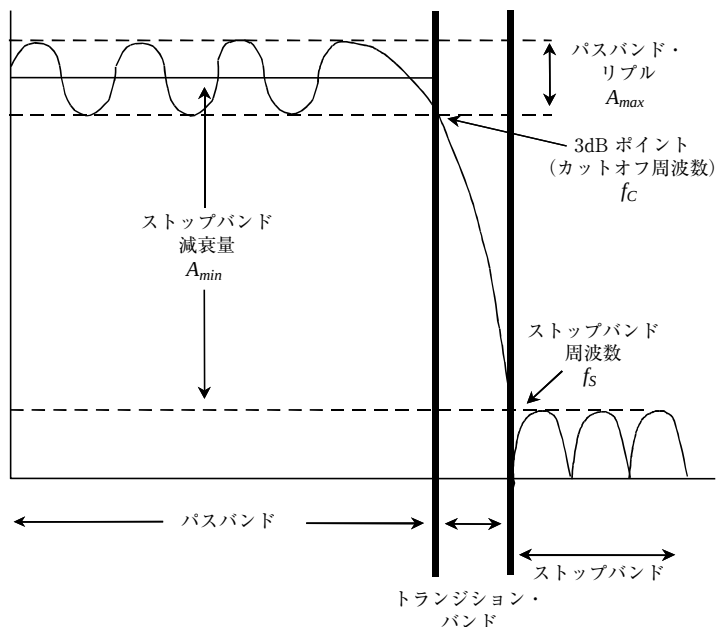
〈図1-1〉フィルタの理想応答特性



理想的なフィルタは、注目するパスバンド (passband；通過域) における振幅方向の応答がユニティまたはある一定のゲインで、それ以外のストップバンド (stopband；阻止域) ではゼロになります。この応答が、パスバンドからストップバンドに切り替わる周波数を、カットオフ周波数 (cutoff frequency；遮断周波数) と呼びます。図1-1 (a) は、理想ローパス・フィルタ (lowpass filter, LPF) の特性です。このフィルタでは、低域がパスバンドで、高域がストップバンドになっています。このローパス・フィルタと逆の特性になっているのが、ハイパス・フィルタ (highpass filter, HPF) です。図1-1 (b) がその理想特性で、低域がストップバンド、高域がパスバンドになります。

ハイパス・フィルタとローパス・フィルタが直列につながれると、それはバンドパス・フィルタ (bandpass filter, BPF) となります。バンドパス・フィルタは、低域のカットオフ周波数  $f_L$  と高域のカットオフ周波数  $f_H$  の間の帯域の信号を通過させます。 $f_L$  以下の周波数帯域と、 $f_H$  以上の帯域がストップバンドとなります。このフィルタの理想特性を図1-1 (c) に示します。このバンドパス・フィルタと相補的な特性をもつのが、バンドリジェクト・フィルタ (bandreject filter, BRF), またはバンドエリミネーション・フィルタ (bandelimination filter, BEF), あるいはノッチ・フィルタ (notch filter) と呼ばれるものです。パスバンドは、 $f_L$  以下および  $f_H$  以上で、ストップバンドはこの  $f_L$  と  $f_H$  の間の帯域です。図1-1 (d) に、このノッチ特性を示します。

〈図 1-2〉フィルタの主要なパラメータ



これらの図に描かれた理想フィルタ特性は、残念ながら簡単には実現できません。パスバンドとストップバンドの切り替わりは瞬間的ではなく、ある遷移領域（トランジション・バンド）が存在します。また、ストップバンドでの減衰は無限大ではありません。実際の特性を表現する4種のパラメータを図1-2に示します。

カットオフ周波数（遮断周波数； $f_c$ ）は、フィルタの応答がある誤差範囲から外れる周波数，すなわちバターワース応答特性では振幅が $-3\text{ dB}$ 低下する周波数です。ストップバンド周波数（阻止域周波数； $f_s$ ）は、応答が減衰により最小値に達する周波数です。パスバンド・リップル（通過帯域リップル； $A_{max}$ ）は、パスバンド内における応答の平坦性（リップル誤差範囲）を示します。ストップバンド最小減衰比（ $A_{min}$ ）は、ストップバンド内のミニマムの信号減衰比（アッテネーション）として規定されます。

フィルタ特性の急峻さは、その次数（オーダー； $M$ ）により規定されます。この次数 $M$ は、伝達特性関数におけるポール（pole；極）の数を表します。ポールは、伝達特性関数の分母の根です。反対に、分子側の根はゼロと呼ばれます。一つのポールは、 $-6\text{ dB/oct.}$ （周波数が2倍で振幅が $-6\text{ dB}$ ），あるいは $-20\text{ dB/dec.}$ （周波数が10倍で振幅が $-20\text{ dB}$ ）の応答特性をもたらします。また、ゼロは $+6\text{ dB/oct.}$ （周波数が2倍で振幅が $+6\text{ dB}$ ），

あるいは+ 20 dB/dec. (周波数が10倍で振幅が+ 20 dB) の特性をもたらします。

ただし、すべてのフィルタがこのような特性をもつのではないことに注意してください。たとえば、ポールだけで構成された回路(オール・ポール構成、回路内にゼロがない)では、パスバンド内のリプルはありません。バターワース(Butterworth)やベッセル(Bessel)フィルタはオール・ポール構成タイプで、パスバンドでのリプルはありません。

一般的に、これらのパラメータの一つ以上は可変です。たとえば、A-Dコンバータのアンチエイリアス・フィルタを設計しようとするとき、設計者はいくつかのパラメータを想定します。どれくらいまでの信号を通すかというカットオフ周波数、一般的にはサンプリング・レートの半分であるナイキスト周波数をもとにしたストップバンド、そしてシステムのダイナミック・レンジや分解能により決まる最小減衰比などです。これらが明確になったら、数表やコンピュータの設計プログラムを参照し、そのほかのパラメータ、フィルタの次数、 $f_0$ あるいは $Q$ を決めます。これらのパラメータは、各セクションのピーキング特性を決め、また各セクションに使用する素子の定数を決定します。

またフィルタは、信号の振幅だけでなく、その位相にも影響を与えることに注意しなければなりません。例を挙げれば、シングル・ポール(単極)の回路セクションは、クロスオーバー周波数で $90^\circ$ の位相シフトを生じます。ポールが二つあれば、同じくクロスオーバー周波数で $180^\circ$ の位相のずれを発生します。フィルタの $Q$ は、この位相の変化率を表します。これらについては、次章でより詳しく解説します。

# 第 2 章

## フィルタの伝達関数

Hank Zumbahlen / 訳：藤森弘己

### 2-1 $s$ 平面

キャパシタンスやインダクタンスのインピーダンスは周波数により変化するため、フィルタはこれらを使って周波数変化に応じたレスポンス（応答）をするようになっています。そこで、これらのインピーダンスを複素数で表すと、次のようになります。

$$Z_L = sL \quad \dots\dots\dots (6-1)$$

$$Z_C = \frac{1}{sC} \quad \dots\dots\dots (6-2)$$

$$s = \sigma + j\omega \quad \dots\dots\dots (6-3)$$

ここで、 $\sigma$  はネーパ周波数 (Neper frequency) で、単位はネーパ/秒 [Np/s] で表され、 $\omega$  は角周波数で、単位はラジアン/秒 [rad/s] で表されます。

標準的な回路解析手法によって、フィルタの伝達特性を表す式を求めることができます。これらのなかでは、オームの法則、キルヒホッフの電圧/電流の法則などが、複素数のインピーダンス表現形式と重ね合わせて利用されていることに注意してください。この伝達特性は、次の式のように表現されます。

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad \dots\dots\dots (6-4)$$

ここで、関数  $H(s)$  は、実数の係数をもつ  $m$  次の分子側級数と、同じく実数係数をもつ  $n$  次の分母側級数との比率を表します。分母側の  $n$  は、このフィルタの次数になります。

この式の根を求めると、回路のポール（分母側）とゼロ（分子側）が求まります。ポール（pole；極）は、1個当たり $-6\text{ dB/oct.}$ （ $-20\text{ dB/dec.}$ ）の応答を与えます。その逆に、ゼロ（zero；零）は、1個当たり $+6\text{ dB/oct.}$ （ $+20\text{ dB/dec.}$ ）の応答を与えます。これらの根は、実数あるいは複素数です。それが複素数のときは、共役の根のペアとなります。これらの根を、横軸が $\sigma$ （実数軸）、縦軸が $j\omega$ （虚数軸）の $s$ 平面（複素平面）上にプロットすることができます。根がどのように $s$ 平面上に分布しているかということは、その回路について多くのことを教えてくれます。回路を安定に動作させるためには、プロットされる点はすべて平面の左側の象限になければなりません。もし原点にゼロが存在すれば、それは分子側にゼロ点があるということですが、そのフィルタ回路はDCでの応答がなく、ハイパスかバンドパス・フィルタです。

ここで、図2-1に示すRLC回路を考えます。最初に述べた、分圧器（voltage divider）という考えかたを用いると、図の抵抗にかかる電圧は、次のように表されます。

$$H(s) = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1} \quad \dots\dots\dots (6-5)$$

回路の定数を式(6-5)に代入すると、次のようになります。

$$H(s) = 10^3 \times \frac{s}{s^2 + 10^3 s + 10^7}$$

これを因数分解し、正規化すると、次の式になります。

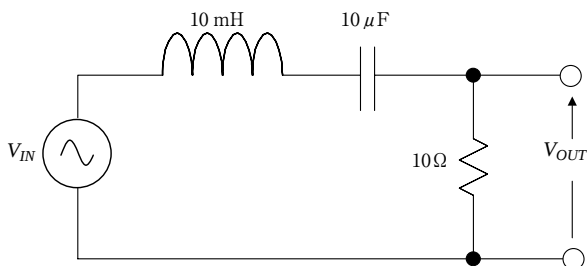
$$H(s) = 10^3 \times \frac{s}{[s - (-0.5 + j3.122) \times 10^3] \times [s - (-0.5 - j3.122) \times 10^3]}$$

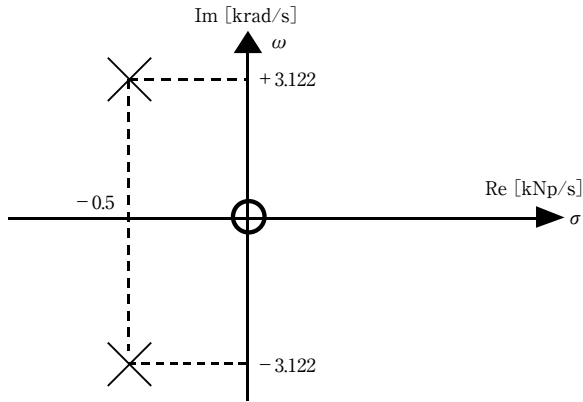
この式を見ると、原点にゼロがあり、下記の1組のポールが存在することがわかります。

$$s = (-0.5 \pm j3.122) \times 10^3$$

この計算結果を $s$ 平面にプロットすると、図2-2のようになります。

〈図2-1〉RLC回路



〈図 2-2〉ポールとゼロの  $s$  平面でのプロット図

ここまでは、純粋に数学的な考察です。多くの場合、工学的な関心は実際の回路でのふるまいにあります。s平面上での検討が完全に妥当であるときは、われわれは多くの場合、ネーパや複素周波数の観点から考えることはありません。

## 2-2 $f_0$ と $Q$

s平面を使った検討が適切でないというなら、先に検討したことはどのような意味をもつのでしょうか。その答えは、より実用的な二つの概念、 $f_0$  と  $Q$  を用いた基本的な検討をすることで得られます。

### ●ローパス・フィルタ (lowpass filter ; LPF)

$f_0$  は、フィルタのカットオフ周波数 (遮断周波数) です。一般的な定義では、カットオフ周波数は、応答がパスバンド (通過帯域) から 3 dB 低下する周波数とされています。場合によっては、パスバンドからの応答が落ち始める周波数と規定されることもあります。たとえば、0.1 dB チェビシェフ・フィルタは、その応答が 0.1 dB 以上低下する周波数を  $f_0$  と規定しています。

減衰率の特性曲線は、カットオフ周波数を調べる場合、時間軸上の特性として規定される位相特性曲線や遅延特性曲線と同じように、実際の値よりその周波数の比率による表現が使われます。1 rad/sec でフィルタ特性を正規化したものが、設計や比較が容易なツールとして作られています。フィルタはこのなかで、カットオフ周波数によりスケールングされ、実際の設計での定数決定が行われます。

$Q$ はフィルタのクォリティ・ファクタです。しばしば $\alpha$ をもちいて、次のように表現されます。

$$\alpha = \frac{1}{Q} \quad \dots\dots\dots (6-6)$$

また、ダンピング比 $\xi$ は、次の式としてよく知られています。

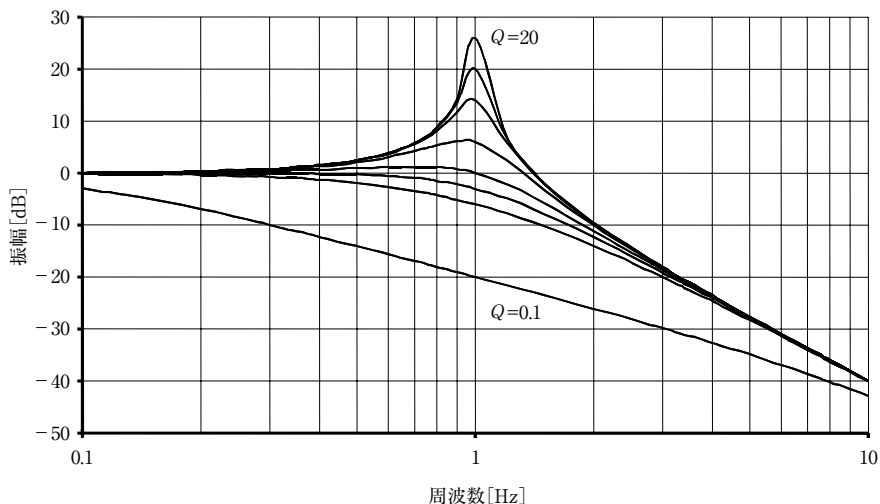
$$\xi = 2\alpha \quad \dots\dots\dots (6-7)$$

もし、 $Q$ が0.707より大きければ、フィルタの応答特性に何らかのピークが生じます。 $Q$ が0.707より小さければ、 $f_0$ でのロールオフ（特性の肩の下がり）は大きく、その変化はより早めに始まり、穏やかなものになります。図2-3に、2ポール・ローパス・フィルタのピーキング特性と $Q$ の関係を示します。

伝達関数 $H(s)$ を、 $\omega_0$ と $Q$ を使って書き直すと次のようになります。

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad \dots\dots\dots (6-8)$$

〈図2-3〉ローパス・フィルタのピーキングと $Q$



ここで、 $H_0$  はパスバンドのゲインで、 $\omega_0 = 2\pi f_0$  です。

これがフィルタ設計に用いられるローパス・フィルタのプロトタイプ・モデルです。

### ●ハイパス・フィルタ (highpass filter ; HPF)

ローパス・フィルタのプロトタイプ・モデルの伝達関数  $H(s)$  の分子である  $H_0$  を  $H_0 s^2$  に変更すると、ハイパス・フィルタにすることができます。ハイパス・フィルタの応答は、周波数軸を逆向きにするとローパス・フィルタの形とそっくりです。

ハイパス・フィルタの伝達関数は次のとおりです。

$$H(s) = \frac{H_0 s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad \dots\dots\dots (6-9)$$

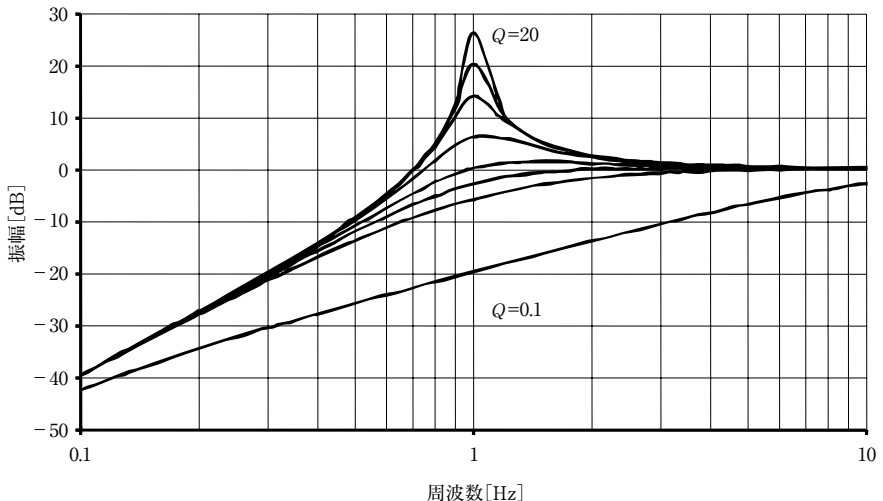
2 ポールのハイパス・フィルタの周波数特性のプロットを図 2-4 に示します。

### ●バンドパス・フィルタ (bandpass filter ; BPF)

ローパス・フィルタの伝達関数の分子部分を  $H_0 \omega_0^2$  に変えると、この式はバンドパス・フィルタを表すようになります。

バンドパス・フィルタの伝達関数を以下に示します。

〈図 2-4〉ハイパス・フィルタのピーキングと  $Q$



$$H(s) = \frac{H_0 \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad \dots\dots\dots (6-10)$$

$\omega_0$  は、このフィルタのピーク・ゲイン周波数 ( $f_0 = 2\pi\omega_0$ ) です。また、 $H_0$  は回路ゲインで、次のように規定されます。

$$H_0 = \frac{H}{Q} \quad \dots\dots\dots (6-11)$$

バンドパス・フィルタにおいては、 $Q$  は特別な意味をもちます。これはフィルタの設計に応じて選ぶことができ、次のように規定されます。

$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L} \quad \dots\dots\dots (6-12)$$

ここで  $f_H$  と  $f_L$  は、応答が最大値から 3 dB 低下する周波数を表します。フィルタの帯域幅 ( $BW$ ) は、次のように表されます。

$$BW = f_H - f_L \quad \dots\dots\dots (6-13)$$

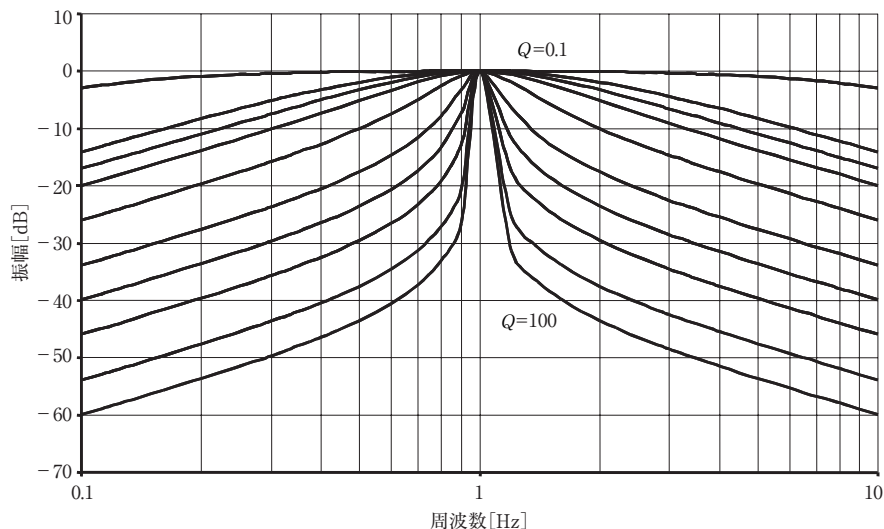
共振周波数 ( $f_0$ ) は、 $f_H$  と  $f_L$  の値から幾何的に求められ、この二つの周波数の中間の位置になりますが、この軸は対数表示であることに注意してください。

$$f_0 = \sqrt{f_H f_L} \quad \dots\dots\dots (6-14)$$

バンドパス・フィルタの応答特性の裾は、対数周波数軸でプロットすると  $f_0$  を中心にして左右対称になります。図 2-5 に  $Q$  の値を変化させたときの応答特性を示します。

ここでひとつ注意すべきことがあります。バンドパス・フィルタの実現には、二つの考えかたがあります。一つは、上に解説したような狭帯域で考える古典的な形です。

しかしながら、高域と低域のカットオフ周波数が広く離れている場合、バンドパス・フィルタは別個のハイパス・フィルタとローパス・フィルタを組み合わせて構成されます。ここで、周波数が広く離れているという意味は、少なくとも 2 オクターブ以上の帯域 (周波数で 4 倍以上) がある場合です。これが広帯域のケースです。

〈図 2-5〉バンドパス・フィルタのピーキングと  $Q$ 

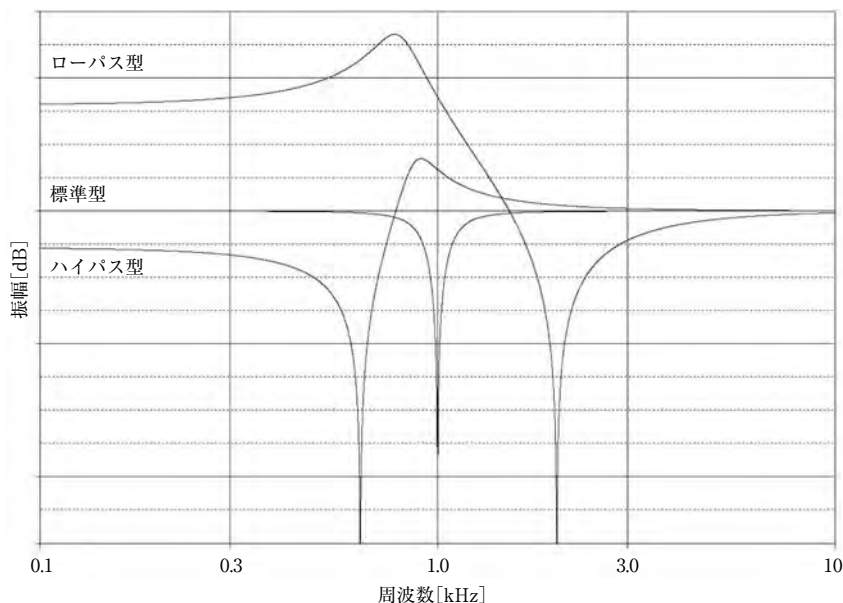
### ● バンドリジェクト・フィルタ (bandreject filter ; BRF) / ノッチ・フィルタ (notch filter)

伝達関数の分子部分の係数を  $s^2 + \omega_z^2$  に置き換えると、バンドリジェクト・フィルタ (ノッチ・フィルタ) と呼ばれる特性になります\*1。バンドパス・フィルタの場合と同じように、もしバンドリジェクト・フィルタの二つのコーナ周波数が1オクターブ以上離れているとき (広帯域のケース) は、この特性はローパス・フィルタとハイパス・フィルタの二つのセクションにより構成されます。したがって、ここでは次のような取り決めにより二つのケースを区別します。狭帯域のケースをノッチ・フィルタと呼び、広帯域の場合をバンドリジェクト・フィルタとします。ノッチ・フィルタ (バンドリジェクト・フィルタ) の伝達関数は次のとおりです。

$$H(s) = \frac{H_0(s^2 + \omega_z^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \dots\dots\dots (6-15)$$

\*1：【訳注】バンドエリミネーション・フィルタ (band-elimination filter ; BEF) と呼ばれることもある。

〈図 2-6〉標準型、ローパス型、ハイパス型のノッチ特性



ノッチ・フィルタの特性は、図 2-6 に示すように、3 種類のケースが考えられます。ポール周波数  $\omega_0$  とゼロ周波数  $\omega_Z$  の関係により、このフィルタの特性が標準的なノッチか、ローパス・ノッチあるいはハイパス・ノッチかが決まります。

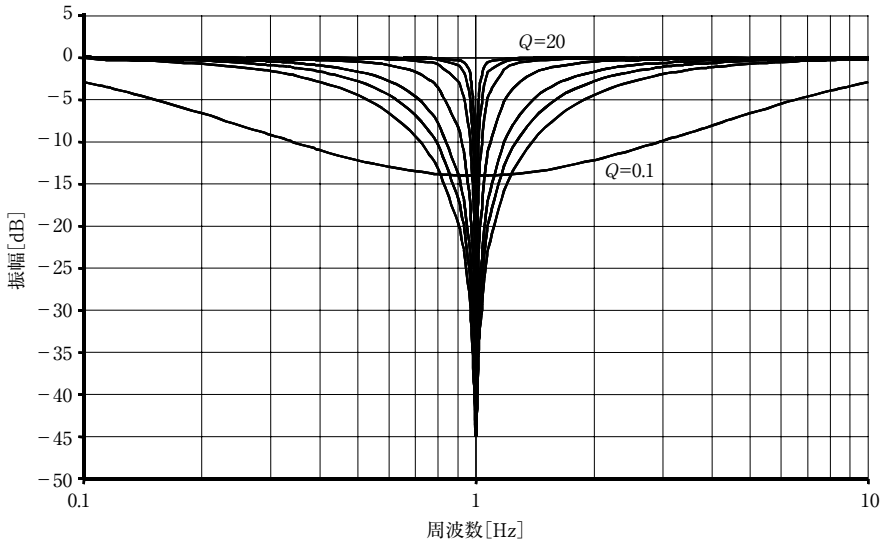
ゼロ周波数がポール周波数と同じであれば、これは伝達特性が左右対称な標準ノッチ・フィルタとなります。この状態では、ゼロは  $j\omega$  平面上のポール周波数を規定する曲線が軸と交差する点に存在します。

ゼロ周波数がポール周波数より高い場合、この特性はローパス・ノッチになります。このとき  $\omega_0$  は、ポール周波数を表す曲線の外側に存在します。これから理解できることは、このフィルタの応答は、 $\omega_Z$  より下の周波数では  $\omega_Z$  より上の周波数より振幅が大きくなるということです。この特性を、エリプティカル・ローパス・フィルタとも呼びます。

ゼロ周波数がポール周波数より低い場合、ハイパス・ノッチ・フィルタ特性が得られます。このとき  $\omega_Z$  は、ポール周波数の曲線の内側に存在します。これから理解できることは、このフィルタの応答は、 $\omega_Z$  より下の周波数では  $\omega_Z$  より上の周波数より振幅が小さくなるということです。この特性を、エリプティカル・ハイパス・フィルタとも呼びます。

ノッチ帯域幅と  $Q$  の関係を図 2-7 に示します。

〈図 2-7〉  $Q$  の違いによるノッチ・フィルタの幅と周波数の関係



● オールパス・フィルタ (allpass filter ; APF)

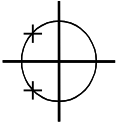
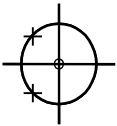
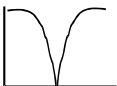
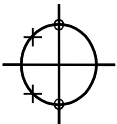
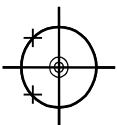
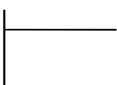
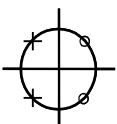
以上のほかに、信号の振幅には影響を与えず、その位相をシフトするためのフィルタがあります。このタイプのフィルタをオールパス・フィルタと呼び、その目的は回路の応答のなかで位相のシフト（ディレイ）を与えるものです。オールパス・フィルタの振幅方向の応答は、帯域すべてに渡ってユニティ・ゲイン応答です。しかし位相の応答特性は、周波数を0から無限大までスイープしたとき、 $0^\circ$  から  $360^\circ$  まで変化します。オールパス・フィルタの目的は、周波数イコライジング（周波数等化回路）がおもなもので、パルス回路などに使用されます。また、この回路は抑圧搬送波単側波帯（single side band, suppressed carrier ; SSB-SC）の変調回路にも用いられます。このフィルタの伝達関数は次のとおりです。

$$H(s) = \frac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \dots\dots\dots (6-16)$$

オールパス・フィルタの伝達特性は、次のように合成して表すことができます。

$$H_{AP} = H_{LP} - H_{BP} + H_{HP} = 1 - 2H_{BP} \dots\dots\dots (6-17)$$

〈図 2-8〉標準的な 2 次フィルタの応答特性

| タイプ                | 振幅                                                                                 | ポール位置                                                                              | 伝達関数                                                                                    |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| ローパス               |   |   | $\frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$                             |
| バンドパス              |   |   | $\frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$                    |
| ノッチ<br>(バンド・リジェクト) |   |   | $\frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$                       |
| ハイパス               |   |   | $\frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$                                    |
| オールパス              |  |  | $\frac{s^2 - \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$ |

比較のため、図 2-8 にそれぞれのフィルタの応答特性と伝達関数をまとめて示しておきます。

## 2-3 位相の応答特性

先にも述べたように、フィルタは信号の振幅 (amplitude) とともに、位相 (phase) にも変化を与えます。このことがどのような違いを生み出すのでしょうか。フーリエ解析によれば方形波は、基本波とその奇数次高調波成分から成り立っています。これらの高調波の振幅と位相の応答は、精密に規定することができます。もし振幅や位相の関係が変化すれば、これらの成分を集合加算しても、もとの方形波を再現することはできません。その波

形は歪んで、オーバーシュートの発生やライズ・タイム（あるいはフォール・タイム）の低下という結果をもたらします。この現象は、より複雑な信号波形でも起こります。

フィルタのポールは、ひとつあたりのコーナ周波数において  $45^\circ$  の位相シフトを加えます。位相は  $0^\circ$ （コーナ周波数より十分に低い領域）から  $90^\circ$ （コーナ周波数より十分に高い領域）まで変化します。この変化が現れるのは、周波数が10倍くらい離れたところからです。マルチポール・フィルタ（多極フィルタ）では、それぞれのポールが位相シフトを発生させるため、全体のシフトはこれらの合計になります。たとえば、2ポール・フィルタでは最大  $180^\circ$ 、3ポール・フィルタでは  $270^\circ$  になります。

シングルポール（単極）のローパス・フィルタの位相応答特性を以下に示します。

$$\phi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0} \quad \dots\dots\dots (6-18)$$

このローパス・フィルタのポールのペア（共役根）での位相応答は、次のとおりです。

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = & -\arctan \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] \\ & -\arctan \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_0} - \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (6-19) \end{aligned}$$

また、シングルポール・ハイパス・フィルタの場合は、位相応答が次のようになります。

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \quad \dots\dots\dots (6-20)$$

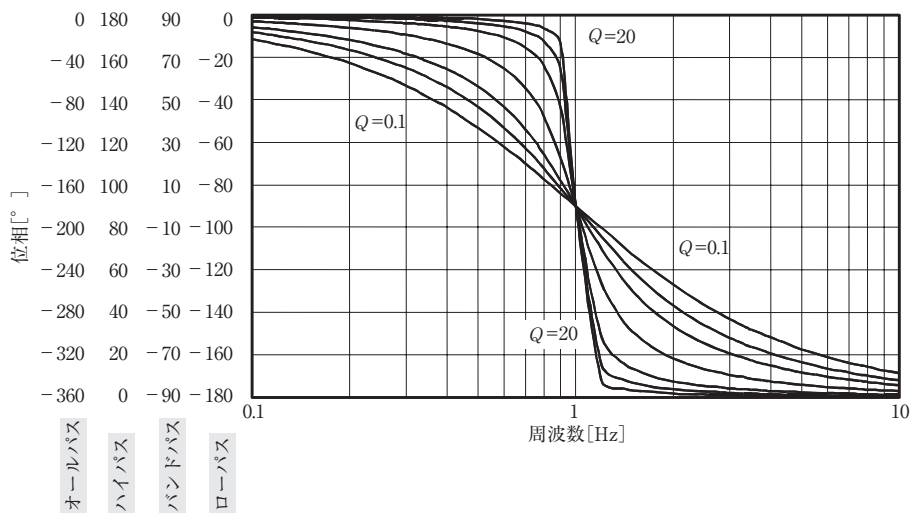
同じように、ハイパス・フィルタのポール・ペアでの位相応答を下記に示します。

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = & \pi - \arctan \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] \\ & -\arctan \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_0} - \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (6-21) \end{aligned}$$

バンドパス・フィルタの場合の位相応答は、次のとおりです。

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = & \frac{\pi}{2} - \arctan \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{2Q\omega}{\omega_0} + \sqrt{4Q^2 - 1} \right) \right] \\ & -\arctan \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{2Q\omega}{\omega_0} - \sqrt{4Q^2 - 1} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (6-22) \end{aligned}$$

〈図 2-9〉各種フィルタの位相-周波数特性



また、 $Q$ の違いによる位相シフトの変化の度合を示したものが、図 2-9 (ローパス、ハイパス、バンドパスおよびオールパス)と図 2-10 (ノッチあるいはバンド・リジェクト)です。

周波数に対する位相の変化を知ることは、大変有用です。これはフィルタのグループ・ディレイ特性 (群遅延特性)と呼ばれています。もちろん、このディレイがすべての周波数にわたってフラット (一定)であれば理想的なのですが、残念ながらそれは少なくとも振幅による違いを発生します。シングルポール・ローパス・フィルタのグループ・ディレイは、次のように表されます。

$$\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{\cos^2 \phi}{\omega_0} \dots\dots\dots (6-23)$$

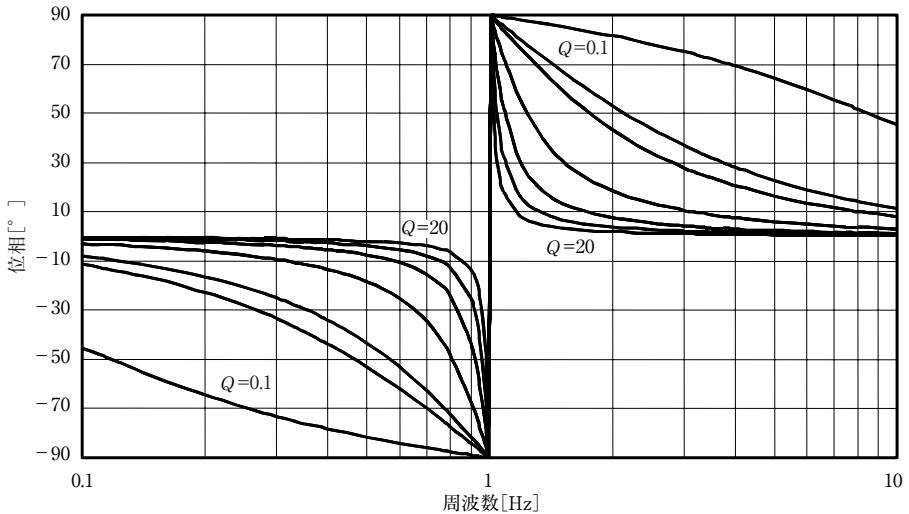
このローパス・フィルタのポールのペアでは、次のとおりです。

$$\tau(\omega) = \frac{2\sin^2 \phi}{\alpha\omega_0} - \frac{\sin 2\phi}{2\omega} \dots\dots\dots (6-24)$$

また、シングルポール・ハイパス・フィルタでは、以下のようになります。

$$\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{\sin^2 \phi}{\omega_0} \dots\dots\dots (6-25)$$

〈図 2-10〉ノッチ・フィルタの位相-周波数特性



同じように、ハイパス・フィルタのポールのペアでの特性は、以下のとおりです。

$$\tau(\omega) = \frac{2\sin^2 \phi}{\alpha\omega_0} - \frac{\sin 2\phi}{2\omega} \dots\dots\dots (6-26)$$

バンドパス・フィルタの場合は次のようになります。

$$\tau(\omega) = \frac{2Q\cos^2 \phi}{\alpha\omega_0} + \frac{\sin 2\phi}{2\omega} \dots\dots\dots (6-27)$$

### ●位相非直線性の影響

信号の波形は、振幅と周波数の規定された一連の信号成分と、周波数と位相の関係で表現することができます。たとえば、矩形波の場合は次のとおりです。

$$f(t) = A \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\omega t + \frac{2}{7\pi} \sin 7\omega t + \dots \right) \dots\dots\dots (6-28)$$

もし、この信号波形がフィルタを通過すると、これらの異なった周波数の信号成分に対する振幅と位相応答はそれぞれ異なったものになります。もし位相遅延がすべて同じであれば、フィルタ通過後の波形に歪みは生じません。しかしながら、もし周波数が異なる信号

成分に対する振幅や位相に関するフィルタの影響が異なれば、それらの変化は一定ではなく、これらを単純に加算しただけではすまなくなります。この影響により、波形が変わってしまうかもしれません。これらの歪みは、一般的にオーバーシュートあるいは出力立ち上がり（ライジング）と呼ばれる特性として明らかにされています。

すべての信号が、高調波の組み合わせとして構成されているわけではありません。たとえば、振幅変調信号（AM）は、キャリア（搬送波）とその両側に被変調波のサイドバンド（側波帯）成分をもちます。もし、フィルタがこれらの異なる波形成分に対して同じディレイをもたないとすると、「エンベロープ・ディレイ（包絡線遅延）」を発生し、波形が歪みます。

リニアな位相シフト特性は、一定のグループ・ディレイを発生し、リニアなファンクションに対する影響は一定になります。

## 第 3 章

# 時間領域の応答特性

Hank Zumbahlen / 訳：國頭延行

これまでは、各種フィルタの周波数領域における応答特性に関して解説をしてきました。ここからは時間領域における応答特性、特に過渡応答特性に関して解説していきたいと思います。時間領域の応答特性と周波数領域における応答特性とを変換するためには、フーリエ変換またはラプラス変換を用います。これらの変換公式は、正弦波ではない信号を入力した場合の各種フィルタの特性を評価するための手段を提供してくれます。

フィルタの伝達関数は、その出力と入力之比で表すことができます。時間領域においては、フィルタのインパルス応答が伝達関数を決定し、周波数特性を表現してくれます。時間領域における応答特性は、多くのシステムにおいて考慮しなければならない実際的な特性であり、たとえば電圧と位相情報を用いて変調を行っている通信関係のアプリケーションにフィルタを使う場合は、非常に重要な特性になります。

## 3-1 インパルス応答

インパルス応答を測定するためのインパルス関数とは、振幅が無限大、パルス幅が無限小で、かつその面積は1である関数と定義されています\*1。もちろん、このような関数は現実世界では実現不可能です。もしインパルスのパルス幅が、フィルタの立ち上がり時間より十分に小さいと仮定するならば、フィルタのインパルス応答は、理想フィルタのインパルス応答とかなり近いものになり、実用上問題のないインパルス応答特性を得ることができます。

時間領域におけるフィルタのインパルス応答は、周波数領域における周波数特性と反比例の関係にあります。つまり、時間領域におけるインパルス応答のパルス幅が狭い場合、

\*1：【訳注】一般的には、この関数を  $\delta$  (デルタ) 関数と呼ぶ場合が多い。

周波数領域における周波数特性は広くなります。また、インパルス応答の振幅は $\omega_C/\pi$ と等しくなり、この値もフィルタの周波数帯域と比例関係にあります。つまり、インパルス応答の振幅が高ければ、フィルタの周波数特性も広いと言えます。時間領域におけるインパルス応答のパルス幅は、 $2\pi/\omega_C$ で表されますが、この値は周波数領域における周波数特性と反比例の関係にあります。つまり、パルス幅が狭ければ周波数帯域は広いわけです。別の言いかたをすれば、時間領域におけるインパルス応答の振幅と周波数領域における周波数帯域の積は一定になることを示しています。

ラプラス変換やフーリエ変換を用いないでフィルタの特性を計算することは、大変な労力を要します。ラプラス変換は、乗算や除算の計算を簡単な加減算に変換します。ラプラス変換を使わないで時間領域の応答を計算する場合、積分や微分を計算しなければなりません。ラプラス変換を使うことによって、これらの複雑な計算を単純な四則演算に置き換えられるという大きなメリットがあります。フーリエ変換は、ラプラス変換と逆の演算（時間領域の信号を周波数領域に変換する）を行ってくれます。

これらの変換に関する詳細についてはここでは言及しませんが、フィルタの周波数特性とインパルス応答との間の関係に関して、これらの変換式を使って簡単な説明を行う場合もあります。

先ほど述べたように、インパルス応答特性と周波数特性とは密接な関係があります。すなわち、急峻な減衰特性をもつフィルタは、帯域外の信号や各種ノイズから、必要とされる信号を取り出す弁別能力に優れています。しかしながら、時間領域では、この種のフィルタ（たとえばチェビシェフ・フィルタ）は、オーバーシュートやリングングの多い、時間領域の応答としてはあまり良くないインパルス/ステップ応答を示します。オールポール伝達関数<sup>\*2</sup>のフィルタの場合、チェビシェフ・フィルタが最も良い信号弁別能力を持ち、つづいてバターワース、ベッセルの順になります。

もし時間領域の応答特性でランク付けするならば、ベッセル・フィルタが最も良い特性を示し、つづいてバターワース、チェビシェフの順になります。これらのフィルタ特性に関する詳細は、第4章で解説します。

時間領域のインパルス応答特性は、フィルタの次数が増えると変化します。フィルタの次数が高ければフィルタのロールオフ特性は急峻になります。したがって、時間領域における応答特性を悪くするようになります。多段フィルタの各ステージは、それぞれ別の時間軸応答をもっています。トータルの時間軸応答は、それぞれのステージでの時間領域における応答を重ね合わせたものとなります。多段フィルタの場合に時間領域における応答

<sup>\*2</sup>：【訳注】フィルタの伝達関数において、ゼロ（伝達関数の分子における根）をもたないものを「オールポール伝達関数（全極型伝達関数）」と呼ぶ。

が悪化するの、各段のフィルタの周波数応答特性でのロールオフ特性が急峻になり、フィルタの $Q$ が増加することと密接な関係にあります。  $Q$ が増加することで多段フィルタの各セクションの周波数応答のオーバーシュートやリングングが増加し、結果としてそれらの歪みの影響が重なり合って時間軸上の応答特性を悪化させます。

## 3-2 ステップ応答

フィルタのステップ応答は、インパルス応答を時間で積分したものとなります。一般的な特性については、インパルス応答とステップ応答のどちらにも適用されます。ステップ応答の立ち上がり時間の傾きは、インパルス応答のピーク値と等しくなります。また、フィルタのバンド幅と立ち上がり時間の積は一定となります。インパルス関数は、ラプラス変換で1と表されますが、ステップ関数は $1/s$ と表されます。双方とも単位がないので、正規化することが可能です。

フィルタのステップ応答は、変調された信号のエンベロップ歪みを決定するために有用です。フィルタのステップ応答のパラメータのなかで最も重要なものは、オーバーシュートとリングングです。良いステップ応答を実現するためには、オーバーシュートはなるべく小さくしなければなりません。またリングングは、次にやってくるパルスへの影響を小さくするために、なるべく速いタイミングでなくなっていく必要があります。

\*

\*

実際の世界では、理想的なインパルス信号やステップ信号を印加することはできません。したがって、計算上のインパルス応答またはステップ応答（まとめてトランジェント応答と呼ぶ）は、実際上の応答特性と完全に一致することはありません。しかしながら、理想的なトランジェント応答は、多くの実際のフィルタのトランジェント応答を比較する有用な手がかりとして使うことができます。

ステップ応答やインパルス応答は数学的に厳密に計算可能なので、コンピュータによって比較的容易に計算できます。多くのCADソフトウェアはこれらの応答特性を計算する機能をもっています。いろいろな特性をもつフィルタの時間領域におけるトランジェント応答を、第4章で紹介していきます。

## 第 4 章

# 代表的なフィルタの応答特性

Hank Zumbahlen / 訳：國頭延行

フィルタの振幅特性と位相特性の要求を満足させる多くの伝達関数が存在します。そのなかから必要な特性を満足するものを一つ選び出す必要があります。周波数領域における応答特性と時間領域における応答特性を比較して選択することが重要となります。また、フィルタの構成の複雑さとのトレードオフも考慮しなければならず、その複雑さによってコストも違ってきます。

## 4-1 全極型のフィルタ特性

### ●バターワース特性

バターワース (Butterworth) 特性をもったフィルタは、振幅特性と位相特性のバランスが最も良いフィルタです。バターワース特性は、信号の通過域と阻止域においてリップルをもっていません。そのため、最大平坦特性フィルタと呼ばれています。バターワース特性では、信号の通過域から阻止域への変化領域は比較的緩やかで、そのため振幅特性の平坦性が良く、比較的スムーズなロールオフ特性 (トランジェント特性) をもっています。

バターワース・フィルタの正規化されたポール (pole; 極) は、s 平面上の単位円の上に存在します。ポールの位置は以下の式で表されます。

$$-\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} + j \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (6-29)$$

$k$ : ポール・ペア番号,  $n$ : ポールの数

各ポールは、単位円上で等距離に存在し、各ポール間の角度は等しくなります。

ポールの位置を与えると、 $\omega_0$  と  $\alpha$  (または  $Q$ ) の値が決まります。これらの値を使って、フィルタを構成するための素子の値を決めることができます。パッシブ・フィルタの設計

表では、周波数とインピーダンスを正規化したフィルタ<sup>\*3</sup>として扱います。このような設計表では、周波数は1 rad/secに、インピーダンスは1  $\Omega$ に正規化されています。これらの値は、要求されるカットオフ周波数や特性インピーダンスに合わせて変換を行い、実際に使用する素子の値に変換することが可能です。正規化されたフィルタを使えば、さまざまなフィルタの周波数領域や時間領域における応答特性を同じ土俵で比較することができるというメリットがあります。バターワース・フィルタでは、 $\omega_0 = 1$ で-3 dBの応答特性に正規化されています。

バターワース・フィルタの各素子の値は、ほかのフィルタに比べて扱いやすく、それほど厳密な値を要求されません。周波数応答特性、群遅延特性、インパルス応答特性、それにステップ応答特性を図4-6 (p.46)に示します。また、ポールの位置とそれに対応する $\omega_0$ と $\alpha$ の値は、表4-2 (p.68)に設計表として一覧表にして示してあります。

## ●チェビシェフ特性

チェビシェフ (Chebyshev <sup>\*4</sup>) 特性は通過域におけるリプル特性を犠牲にすることで、同じ次数のバターワース・フィルタに比べると、周波数特性の変化領域は急峻な特性を示します。通過域における振幅リプル量を最小限にするという「チェビシェフ基準」に適合するフィルタという事実から、このフィルタをチェビシェフ・フィルタと呼びます。

チェビシェフ・フィルタは、直流での振幅減衰量は0 dBとなります。奇数次のチェビシェフ・フィルタの通過域における周波数特性は、0 dBを基準にフィルタの特性で決まるリプル量まで減衰していくような特性をもちます<sup>\*5</sup>。一方、偶数次のチェビシェフ・フィルタの通過域の周波数特性は、0 dBからスタートしてフィルタ特性で決まるリプル量と同等のゲインをもつようになります<sup>\*6</sup>。また、リプルの周期はフィルタの次数と等しくなります。

チェビシェフ・フィルタのポール位置を得るには、バターワース・フィルタのポール位置をs平面上で若干右側に動かします。そのため、ポールはs平面上の原点を中心とした楕円上に位置するようになります。この計算はバターワース・フィルタのポールの実数部分に係数 $k_R$ を、また虚数部分に係数 $k_I$ を掛けることで実現できます。 $k_R$ と $k_I$ は次の式によって計算されます。

\*3：【訳注】このフィルタのことを「プロトタイプ・フィルタ (prototype filter)」と呼ぶ。

\*4：【訳注】原著にはChevyshev, Tschebychev, Tschebyscheff, Tchevysheffの綴りも示されている。ロシア語をどのように英語表記するかの相違という。

\*5：【訳注】奇数時のチェビシェフ・フィルタの場合には、振幅減衰量が0 dBを越えることはない。

\*6：【訳注】つまり減衰しないで、リプル量まで持ち上がるような特性をもつことになる。

$$k_R = \sinh A \quad \cdots \cdots \cdots (6-30)$$

$$k_I = \cosh A \quad \cdots \cdots \cdots (6-31)$$

ここで、 $A$  は、

$$A = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \quad \cdots \cdots \cdots (6-32)$$

$n$  : フィルタの次数

$\varepsilon$  は、

$$\varepsilon = \sqrt{10^R - 1} \quad \cdots \cdots \cdots (6-33)$$

$R$  は、

$$R = \frac{R_{dB}}{10} \quad \cdots \cdots \cdots (6-34)$$

$$R_{dB} : \text{パスバンド・リプル [dB]} \quad \cdots \cdots \cdots (6-35)$$

$R_{dB}$  は、通過域におけるリプル量を dB で表した値です。

チェビシェフ・フィルタも正規化表現が用いられ、 $\omega_0 = 1$  において、リプルがなくなり信号の減衰が始まります。また、 $-3$  dB 周波数帯域は、以下の式で与えられます。

$$A_{3dB} = \frac{1}{n} \cosh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \quad \cdots \cdots \cdots (6-36)$$

これらの値は、表 4-1 にまとめてあります。

周波数応答特性、群遅延、インパルス応答およびステップ応答は、図 4-7 (p.48) から図 4-11 (p.56) にかけて、通過域のリプル量 (0.01 dB, 0.1 dB, 0.25 dB, 0.5 dB, 1 dB) ごとに示してあります。 $\omega_0$  と  $\alpha$  に対応したポールの位置は、表 4-3 (p.69) から表 4-7 (p.73) に一覧表として示してあります。

## ●ベッセル特性

バターワース・フィルタは、比較的素直な周波数特性とトランジェント応答をもっています。チェビシェフ・フィルタは、トランジェント応答を犠牲にすることによって急峻な

〈表 4-1〉 各次数のチェビシェフ・フィルタにおけるリップル量と－3 dB 周波数帯域の関係

| 次数 | 0.01 dB | 0.1 dB  | 0.25 dB | 0.5 dB  | 1 dB    |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|
| 2  | 3.30362 | 1.93432 | 1.59814 | 1.38974 | 1.21763 |
| 3  | 1.87718 | 1.38899 | 1.25289 | 1.16749 | 1.09487 |
| 4  | 1.46690 | 1.21310 | 1.13977 | 1.09310 | 1.05300 |
| 5  | 1.29122 | 1.13472 | 1.08872 | 1.05926 | 1.03381 |
| 6  | 1.19941 | 1.09293 | 1.06134 | 1.04103 | 1.02344 |
| 7  | 1.14527 | 1.06800 | 1.04495 | 1.03009 | 1.01721 |
| 8  | 1.11061 | 1.05193 | 1.03435 | 1.02301 | 1.01316 |
| 9  | 1.08706 | 1.04095 | 1.02711 | 1.01817 | 1.01040 |
| 10 | 1.07033 | 1.03313 | 1.02194 | 1.01471 | 1.00842 |

注：表の数値は、正規化されたコーナ周波数 $\omega_0 = 1$ としたときの係数。たとえば、2次で 0.01 dB のリップルをもつチェビシェフ・フィルタは、コーナ周波数 $\omega_0$  の 3.30362 倍のところに－3 dB 周波数が存在するということ。

周波数特性をもたせています。ベッセル (Bessel) 特性は、通過域における位相特性が線形 (つまり時間遅れが一定) であるため、ほかのフィルタに比較して非常に良い時間領域におけるトランジェント応答を示します。このため、周波数応答におけるロールオフ特性はそれほど急峻ではなく、阻止域における信号の減衰特性はあまり良くありません。

ベッセル・フィルタのすべてのポールは、 $s$  平面上のある単位円上に図 4-1 のように存在し、それらの虚数部は以下の式で与えられる間隔で並んでいます。

$$\frac{2}{n} \dots\dots\dots (6-37)$$

ここで、 $n$  はポールの数を表します。ポールのうち、一番上にあるものと一番下にあるものは  $j\omega$  (虚数軸) と単位円が交差するところに存在し、その距離は以下の式で表されます。

$$\frac{1}{n} \dots\dots\dots (6-38)$$

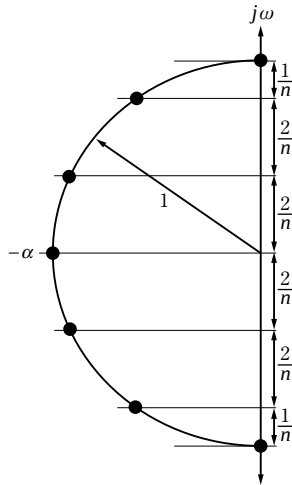
この距離は、他のポール間距離の半分になります。

ベッセル・フィルタの周波数特性、群遅延、インパルスおよびステップ応答は、図 4-12 (p.58) に示してあります。また、ベッセル・フィルタの $\omega_0$  と  $\alpha$  に対応したポールの位置は、表 4-8 (p.74) に示してあります。

### ●等リップル誤差をもつ線形位相フィルタ (ベッセル・フィルタの一種)

線形位相フィルタは、ベッセル・フィルタに比べてさらに広い範囲で通過域における位

〈図 4-1〉ベッセル・フィルタでのボールの位置



相直線性を確保したうえで、カットオフ周波数より上の周波数帯域における信号の減衰特性を向上させています。これは、チェビシェフ・フィルタが振幅特性にリプルをもたせたのと同じように、位相特性にリプルをもたせることによって達成されました。位相のリプル量を増やすことで、群遅延が一定量となる領域が通過域のみならず阻止域にまで及ぶようになります。また、位相特性の微分が群遅延特性となるので、群遅延特性もリプルをもつようになります。線形位相フィルタのステップ応答は、ベッセル・フィルタのそれに比べてオーバーシュートが少しだけ大きくなり、インパルス応答もリングングが多少増加します。

線形位相フィルタのボール位置を計算するのは非常に難しく、ツベレフが著した本[参考文献(1)]を元にかかれた、ウィリアムスの著した本[参考文献(2)]から引用しました。

0.05° および 0.5° の等リプル特性をもつ線形位相フィルタの周波数特性、群遅延特性、インパルス応答特性、ステップ応答特性は図 4-13 (p.60) と図 4-14 (p.62) にそれぞれ示してあります。 $\omega_0$  と  $\alpha$  に対応するボール位置に関しては、表 4-9 (p.75) と表 4-10 (p.76) に一覧表として示してあります。

### ●トランジショナル・フィルタ(ベッセルまたはガウシアン・フィルタの一種)

トランジショナル・フィルタ (transitional filter) は、ベッセル・フィルタとよく似た周波数応答を示すガウス・フィルタとチェビシェフ・フィルタの中間的な特性をもつフィル

タです。トランジショナル・フィルタは通過域において、位相の変化がほぼ直線的で、周波数特性も素直で単調に減衰していきます。通過域より上の周波数においては、減衰率がベッセル・フィルタに比べて急激に減衰していくブレイクポイントが存在します。また、ブレイクポイントより上の周波数における減衰特性の急峻さは、次数  $n$  が大きくなるほど顕著になります。

ここでは、二つのトランジショナル・フィルタの特性を紹介します。一つは、ガウス特性から 6 dB 減衰したところにブレイクポイントがある特性をもつもの、もう一つは、ガウス特性から 12 dB 減衰したところにブレイクポイントが存在する特性をもつものです。

ガウス特性から 6 dB 減衰したところにブレイクポイントがある特性をもつトランジショナル・フィルタは、通過域における減衰特性がバターワース・フィルタよりも優れています。 $\omega = 1.5$  に存在するブレイクポイントを越えた周波数以上では、減衰特性はバターワース・フィルタに似た特性を示します。

ガウス特性から 12 dB 減衰したところにブレイクポイントが存在する特性をもつトランジショナル・フィルタは、通過域における減衰特性で、バターワース・フィルタよりさらに良い減衰特性を示します。 $\omega = 2$  に存在するブレイクポイントを越えた周波数以上では、減衰特性はバターワース・フィルタよりもさらに急峻な減衰特性を示します。

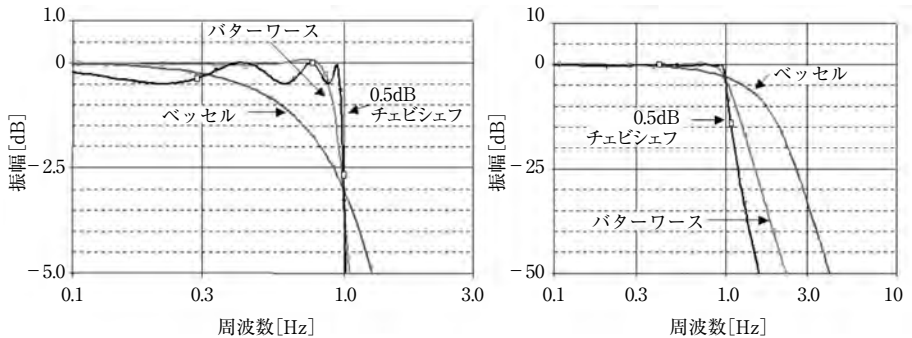
前項の線形位相フィルタと同様に、トランジショナル・フィルタのポール位置を数値計算するための近似法がありません。そのため、ポール位置は、ウィリアムスの著した本 [参考文献 (2)] から引用してあります。この本のなかでは、特殊な曲線近似プログラムを使って計算しています。

ガウス特性から 12 dB 減衰特性をもつトランジショナル・フィルタ、およびガウス特性から 6 dB 減衰特性をもつトランジショナル・フィルタの周波数特性、群遅延、インパルス応答特性そしてステップ応答特性は、それぞれ図 4-15 (p.64)、図 4-16 (p.66) に示してあります。また、 $\omega_0$  と  $\alpha$  に対応するポール位置は、表 4-11 (p.77) と表 4-12 (p.78) にそれぞれ一覧表として示してあります。

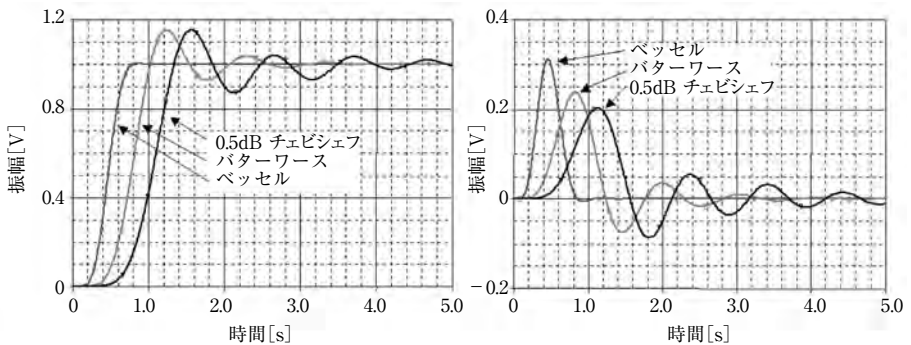
## ●全極型伝達関数をもつフィルタの比較

ベッセル、バターワースそれにチェビシェフ（ここでは 0.5 dB のリプルをもつものを使用）の三つの全極型伝達関数 (all-pole response) をもつフィルタの周波数応答特性を比較してみましょう。比較には、ポールを 8 個もつフィルタを用いました。それぞれの周波数応答特性はカットオフ周波数 1 Hz で正規化されています。特性比較は、図 4-2 と図 4-3 に示してあり、それぞれの応答特性のトレードオフが一目で確認できます。ベッセル、バターワース、チェビシェフと順に見ていくと、周波数領域での減衰特性は急峻になっていきますが、それに伴って時間領域におけるトランジェント応答が順に悪くなっていくこと

〈図 4-2〉ベッセル，バターワース，チェビシェフの各フィルタの周波数領域における振幅特性の比較



〈図 4-3〉ベッセル，バターワース，チェビシェフの各フィルタのステップ応答とインパルス応答の比較



がわかります。

## 4-2 伝達関数にゼロをもつフィルタ特性

### ●楕円関数フィルタ

前節までで述べてきたフィルタ特性は，全極型（オールポール型）の伝達関数をもつフィルタのみを考慮してきました。つまり，伝達関数のゼロ（伝達関数の分子における根）については，0 または  $\infty$  という二つのかけ離れた周波数に位置しているため，考慮する必要がありませんでした。

ローパス・フィルタの場合は，ゼロは周波数無限大のところにあります。もし，有限の

周波数帯域における伝達関数にポールのほかにゼロを加えると、楕円関数フィルタ（カウエル・フィルタとも呼ばれる）を作ることができます。このフィルタは、チェビシェフ・フィルタよりも急峻な信号減衰特性が得られます。それは、阻止域と通過域の両方にリプルが生じることを許しているからです。阻止域にさらにゼロを加えていくと、阻止域にさらにリプルを生じることになりますが、阻止域における信号の減衰率をさらに上げることが可能になります。また、ポール数を増やして同等の効果を得ることもできます。ゼロやポール数を増やすと、追加したゼロの間で阻止域の応答にいくつかのバウンスバック（bounceback）\*7が存在するようになります。これは阻止域におけるリプルになります。また、楕円関数フィルタの時間領域のトランジェント応答特性は、通過域と阻止域にリプルがあるためにあまり良い特性とは言えません。

楕円関数フィルタのポールは、 $s$ 平面上に形成される楕円の上に存在するために、時間領域におけるトランジェント応答は、チェビシェフ・フィルタのそれに似た応答を示します。

楕円関数フィルタの各パラメータは、第1章の図1-2 (p.13) のなかで定義されているものと同じです。 $A_{max}$ は通過域におけるリプルの最大振幅を、 $A_{min}$ は阻止域の最小減衰率を、 $f_c$ はカットオフ周波数で、通過域のリプルがなくなるところの周波数を、 $f_s$ は阻止域の周波数で、減衰率が $A_{min}$ に到達する周波数をそれぞれ示しています。

楕円関数フィルタの特性を決めるには、以下の手順を踏みます。まず、フィルタの次数 $n$ を決めます。つづいて、変調角 $\theta$ を以下の式に基づいて決定します。この変調角 $\theta$ によって、周波数特性におけるロールオフ特性がどの程度急峻であるかが決まります。

$$\theta = \sin^{-1} \frac{1}{f_s} \dots\dots\dots (6-39)$$

つづいて、反射係数である $\rho$ を以下の式で決めます。この $\rho$ によって通過域のリプル量が決まります。

$$\rho = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}} \dots\dots\dots (6-40)$$

ここで、 $\varepsilon$ はチェビシェフ特性におけるリプル係数です。最後に、通過域のリプル量は、以下の式のようにdBで表すことができます。

$$R_{dB} = -10 \log(1 - \rho^2) \dots\dots\dots (6-41)$$

\*7：【訳注】 $s$ 平面の $j\omega$ 軸上にゼロが存在するので、周波数特性に応答特性がいったん急激に下がるような箇所（ノッチ）が存在し、その後、当初の応答特性に戻ってくる現象。

ここまでくると、楕円関数フィルタの大まかな特性が理解できます。フィルタ次数  $n$  と変調角  $\theta$  を与えたうえで、阻止域の減衰率  $A_{min}$  を大きくすると、通過域におけるリプルが大きくなります。また、変調角  $\theta$  が  $90^\circ$  に近づくと、 $f_S$  は  $f_C$  に近づいてきます。つまり、通過域から阻止域へと変化する領域が非常になくなることを意味し、急峻なロールオフ特性をもつことになります。そのかわり、阻止域の減衰率  $A_{min}$  が小さくなります。

また、 $\rho$  は受動楕円関数フィルタの入力抵抗を決定し、フィルタの VSWR (電圧定在波比) を決める要素にもなります。

楕円関数フィルタの設計では数多くの変数があるため、今まで紹介したようなフィルタと同様の設計用係数表を掲載することは難しくなります。いくつかの CAD ソフトウェアでは、設計のために必要な値を示してくれるものもあります。そのほかの情報源として、たとえば参考文献 (2) には、楕円関数フィルタ設計用の係数表が掲載されています。これらの係数表では、以下の設計係数が与えられています。

$$C_n \quad \rho \quad \theta$$

ここで、係数  $C_n$  の  $C$  は Cauer (カウエル) の  $C$  を意味します。楕円関数フィルタは、ネットワーク理論の研究者であるウイヘルム・カウエル (Wilhelm Cauer) の名前を取って、カウエル・フィルタとも呼ばれるため、 $C$  という記号が使われます。

たとえば、

$$C_5 \quad \rho = 10 \quad \theta = 30^\circ$$

とあれば、これは 5 次の楕円関数フィルタであり、反射係数は 10%，変調角は  $30^\circ$  の特性をもったフィルタと定義できます。

## ●チェビシェフ特性の阻止域をもちながら

### 遅延特性が最大限平坦な楕円関数フィルタ

ベッセル型フィルタ (ベッセル・フィルタには、等リプルで位相直線であるフィルタと、減衰特性がある周波数で急激に減衰するトランジショナル・フィルタと呼ばれるものもあるので、まとめて、「ベッセル型」と表記する) は、時間領域におけるトランジェント応答は素晴らしいのですが、周波数領域における減衰特性は急峻ではありません。一方、楕円関数フィルタの周波数領域における減衰特性は急峻ではありますが、時間領域におけるトランジェント応答はあまり良いものとは言えません。チェビシェフと同等の阻止域をもち、最大限の平坦遅延をもたせた楕円関数フィルタは、ベッセル型フィルタの特性にゼロを加えた伝達関数をもっています。ベッセル型フィルタの特長である遅延量一定の特性を保ったまま、阻止域における減衰特性が急峻になります。ステップ応答にはオーバーシュートやリングングはまったく見られず、インパルス応答も非常にきれいで、発振をするような特性はいっさい見られません。また、フィルタの次数  $n$  を大きくしても、群遅延一定の領

域が、阻止域まで延びていきます。

楕円関数フィルタの場合、数値的な評価は難しく、ウイリアムスの著書[参考文献(2)]に、受動型フィルタの正規化された構成素子の値が表として示されています。

### ●逆チェビシェフ・フィルタ

チェビシェフ・フィルタの応答は、通過域においてリプルをもち、阻止域はリプルがなく一定の減衰量をもっています。逆チェビシェフ・フィルタ (inverse Chebyshev filter) の場合は、通過域にはリプルがないかわりに、阻止域にリプルをもちます。通過域の特性は、バターワース・フィルタより良い特性をもち、カットオフ周波数周辺を除いて、チェビシェフ・フィルタよりも良い通過域特性を示します。周波数特性が減衰していく領域に入ると、逆チェビシェフ・フィルタは、バターワース・フィルタやチェビシェフ・フィルタの特性より急峻なロールオフ特性をもちます。それゆえ、低い周波数帯域においては、ここに挙げた三つのフィルタのなかで最も良い減衰量 (図1-2の  $A_{min}$ ) をもたせることができます。しかしながら、逆チェビシェフ・フィルタは、阻止域において以下の式で表される突出部 (リプル) をもっています。

$$\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \dots\dots\dots (6-42)$$

ここで、 $\varepsilon$  はチェビシェフ・フィルタの場合のリプル係数です。つまり、阻止域の周波数の上のほうでは、バターワース・フィルタとチェビシェフ・フィルタのほうが、逆チェビシェフ・フィルタのような突出部をもたないので、より素直な減衰特性を示します。また、時間領域におけるトランジェント応答に関しては、逆チェビシェフ・フィルタはバターワースとチェビシェフの中間の特性を示します。

逆チェビシェフ・フィルタの伝達関数を作るには、三つの手順を踏む必要があります。まず、チェビシェフ・ローパス・フィルタ特性を選択します。つづいて、この伝達関数を1から引きます。最後に、伝達関数の  $\omega$  を  $1/\omega$  に置き換えます。

\*

\*

フィルタの周波数応答に関しては、ここまでに紹介した以外にも多くの特性が世の中に存在します。しかし、それらのすべてをここで紹介することは不可能です。したがって、ここでは最も一般的と思えるいくつかのフィルタ特性のみを選択して紹介するにとどめました。

## 4-3 プロトタイプ・ローパス応答特性の使用法

この解説の後に続くページには、いくつかのプロトタイプ・ローパス応答特性と、各素子の正規化された係数が一覧表になったものが掲載されています(図4-6～図4-16、表4-2～表4-12, pp.46～78)。ここでは、すべての周波数応答特性は、 $-3\text{ dB}$  応答が  $1\text{ Hz}$  になるように正規化されています。この正規化によって、掲載されている各特性の比較が容易にできるようになっています。ポールの数が  $2\sim 10$  の特性をもつ応答曲線を、 $0.1\text{ Hz}\sim 10\text{ Hz}$  の周波数範囲において示してあります。さらに、 $0.1\text{ Hz}\sim 10\text{ Hz}$  までの周波数範囲における群遅延、および  $0\sim 5$  秒までのインパルス応答とステップ応答も同様に示してあります。

これらの各種特性グラフを使って実際に使用するフィルタの応答特性を決定するには、「逆正規化」という手法を用います。振幅特性を求めたい場合は、実際に設計するフィルタのカットオフ周波数  $f_c$  を周波数軸に掛けることによって得られます\*8。群遅延のグラフの場合、群遅延軸を  $2\pi f_c$  で割り、さらに周波数軸に  $f_c$  を掛ければ「逆正規化」が完了し、所望の特性を得ることができます。ステップ応答の場合、時間軸を  $2\pi f_c$  で割れば、「逆正規化」が完了します。インパルス応答の場合は、時間軸を  $2\pi f_c$  で割り、やはり  $2\pi f_c$  を振幅軸に掛ければ「逆正規化」が完了します。

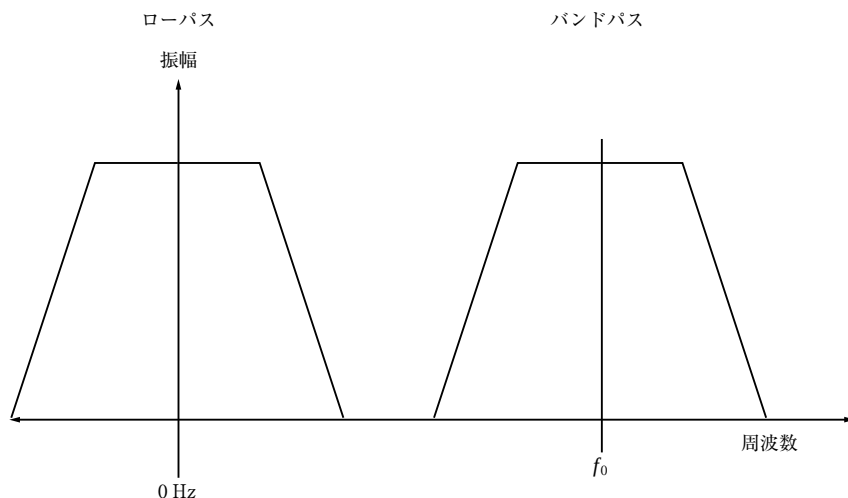
ハイパス・フィルタの周波数領域における特性を得たい場合は、ローパス・フィルタの周波数特性の周波数軸を単純に反転すれば、ハイパス・フィルタの周波数特性が得られます。時間領域におけるトランジェント特性について、ローパス・フィルタ特性からハイパスまたはバンドリジェクト・フィルタ特性を得る方法は簡単ではありません。ツベレフ(Zverev)の著書[参考文献(1)]に、変換用の計算方法が示してあります。

ローパス・フィルタの周波数特性から狭帯域バンドパス・フィルタの周波数特性を得るには、次のように行います。まず、ローパス・フィルタは、理論上  $0\text{ Hz}$  を対称軸とした負の周波数でも周波数特性をもっていることを理解してください(図4-4の左)。そのうえで、ローパス・フィルタの周波数特性の  $0\text{ Hz}$  の軸を、バンドパス・フィルタの中心周波数  $f_0$  まで動かすことで(図4-4の右)、ローパスからバンドパスへの変換が可能になります。実際の世界では、負の周波数での応答特性というのはありえませんが、ローパスからバンドパスへの変換では便利な概念として扱えます。

バンドパス・フィルタの群遅延グラフをローパス・プロトタイプ・フィルタの群遅延グラフから逆正規化するためには、まず群遅延軸を  $\pi BW$  で割り算します。ここで  $BW$  は、

\*8：【訳注】周波数特性のグラフは  $1\text{ Hz}$  で正規化されている。たとえば、 $1\text{ kHz}$  のカットオフ周波数をもつフィルタの特性グラフを得たい場合は、周波数軸を  $1000$  倍すればよい。

〈図 4-4〉ローパス特性からバンドパス特性への変換

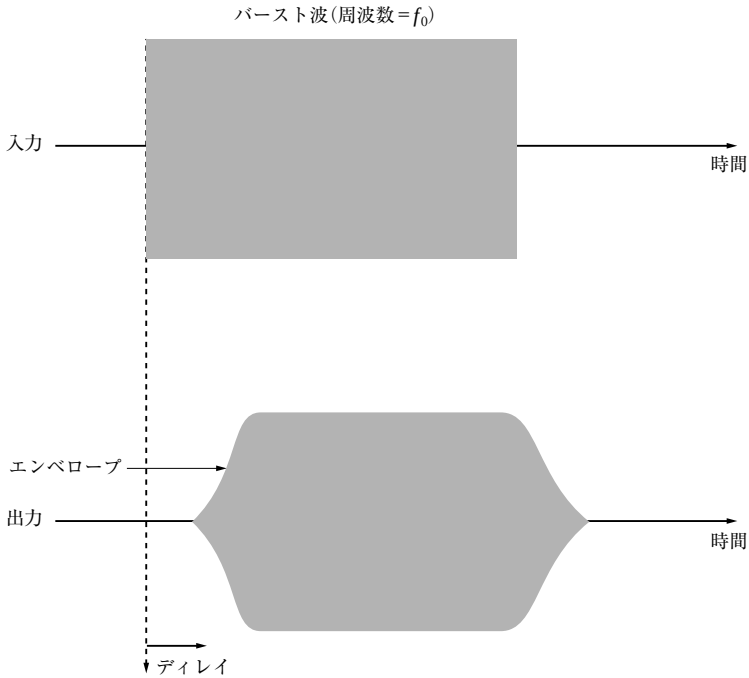


実現しようとしているフィルタの $-3\text{ dB}$ 周波数帯域(単位はHz)です。つづいて、周波数軸を $BW/2$ で掛け算します。一般的に言って、バンドパス・フィルタの中心周波数である $f_0$ における群遅延は、同じ周波数帯域をもつローパス・フィルタの $0\text{ Hz}$ における群遅延の値の2倍になります。この近似方法は、狭帯域のバンドパス・フィルタのみに適応されます。バンドパス・フィルタの帯域が広がると、群遅延のカブに歪みが生じてきます。群遅延は対称型ではなくなり、 $f_0$ より低い周波数でピーキングが発生します。

バンドパス・フィルタの中心周波数 $f_0$ をもつバースト信号をバンドパス・フィルタに入力して、その出力波形をオシロスコープで観測すると、図4-5の下に示すような波形が観測されます。この波形の外形(エンベロープ)は、ローパス・プロトタイプのステップ応答と似ていることに気がつくと思います。もっと正確に言えば、その外形は、バンドパス・フィルタの周波数帯域の半分の帯域をもつローパス・フィルタのステップ応答とほとんど同一形状となります。バンドパス・フィルタのエンベロープ形状を求めるには、元になったローパス・フィルタの時間領域におけるステップ応答を $\pi BW$ で割ります。ここで、 $BW$ はバンドパス・フィルタの $-3\text{ dB}$ 帯域です。また、今まで解説してきたステップ応答のオーバーシュートやリングングに関しては、このバンドパス・フィルタのエンベロープ特性にも当てはめることができます。

狭帯域のバンドパス・フィルタに、非常に短いバースト長をもつバースト信号が入力された場合を考えてみましょう。この場合のバースト長は、逆正規化されたバンドパス・フ

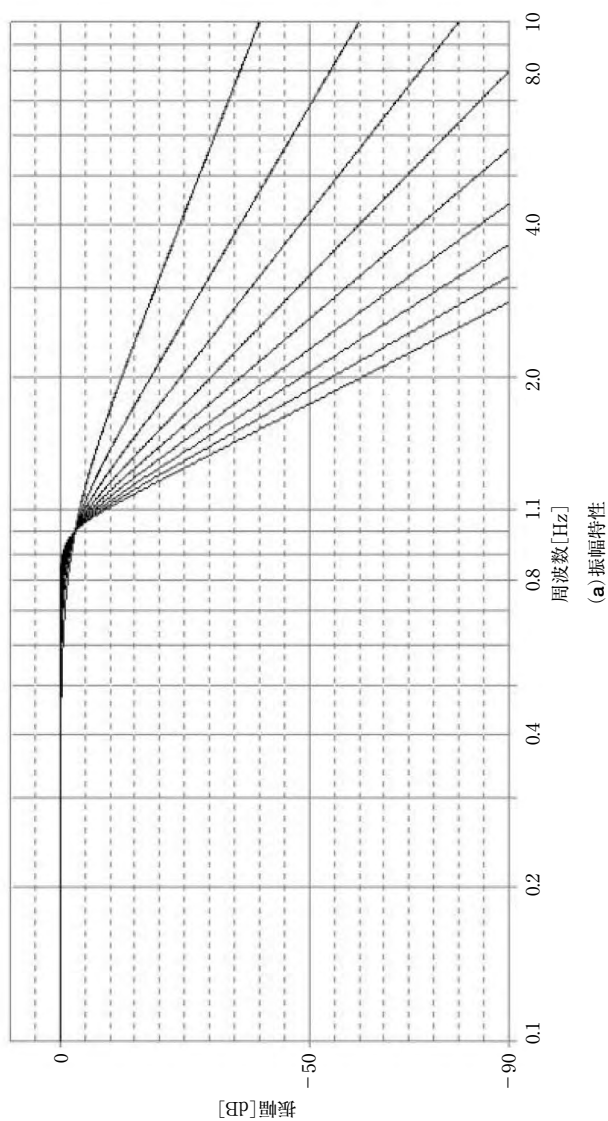
〈図 4-5〉バンドパス・フィルタにバースト波を入力したときの時間領域の応答特性



フィルタのエンベロープ特性の立ち上がり時間よりも短い時間しかもっていなかったとします。こういった場合に、狭帯域のバンドパス・フィルタのエンベロープ特性を求めるには、元になったローパス・プロトタイプのインパルス応答を使って、エンベロープ特性を求めます。これを行うには、ローパス・プロトタイプのインパルス応答の電圧軸に $\pi BW$ を掛け、つづいて時間軸を $\pi BW$ で割ります。ここで、 $BW$ はバンドパス・フィルタの $-3\text{ dB}$ 帯域幅です。この計算が成り立つためには、バースト信号の周波数が、バースト長の中にたくさんの周期が入るだけ十分に高いという条件がつかます。

群遅延やステップ応答、インパルス応答のグラフは、時間領域における波形歪みの予測を行うために直接的に使うことはできないのですが、各種フィルタの特性を比較するという目的においては、便利な図といえます。

〈図4-6〉バタースワース特性



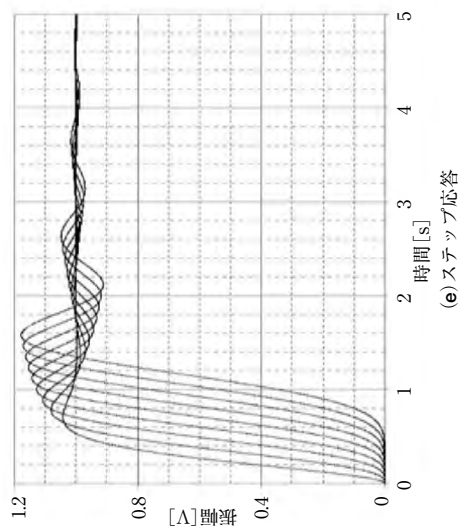
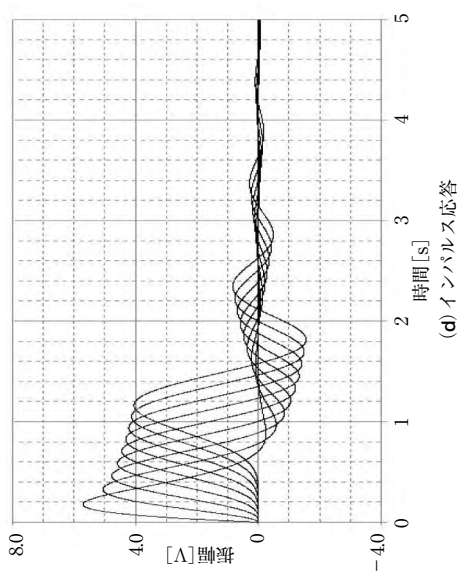
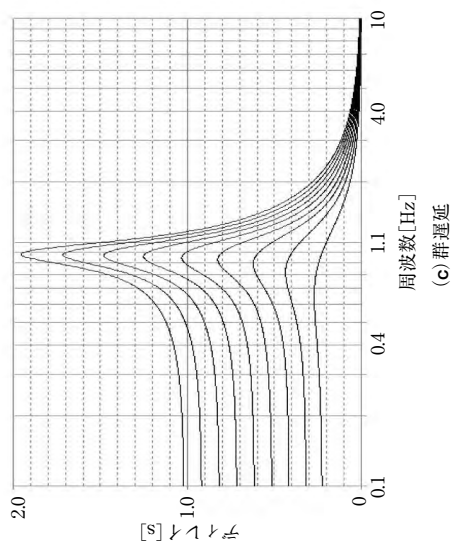
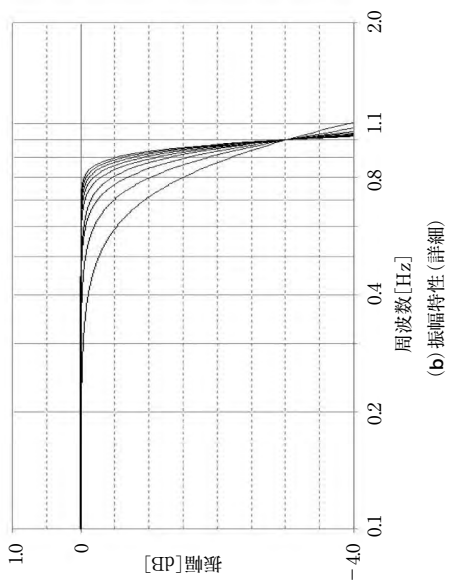
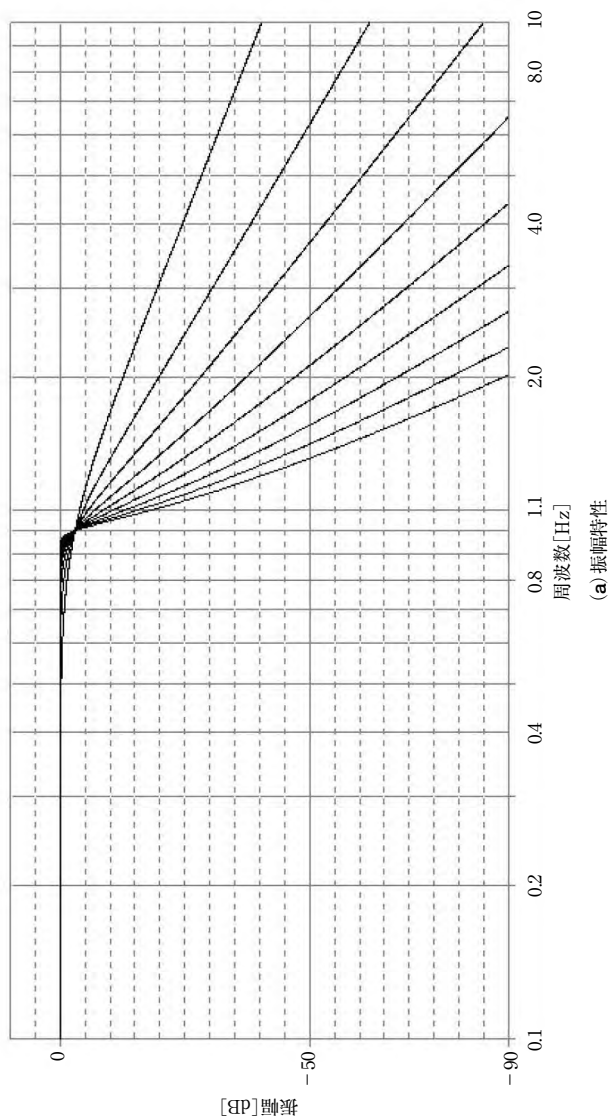
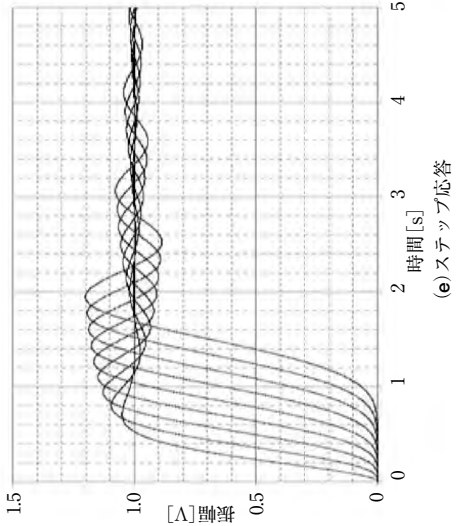
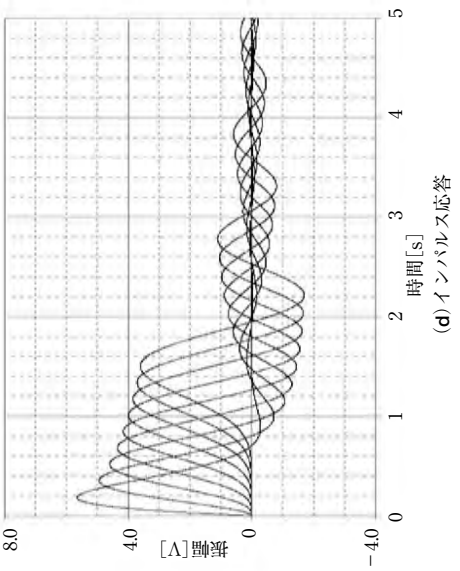
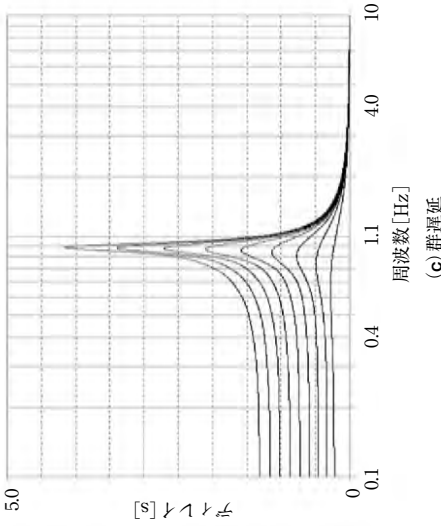
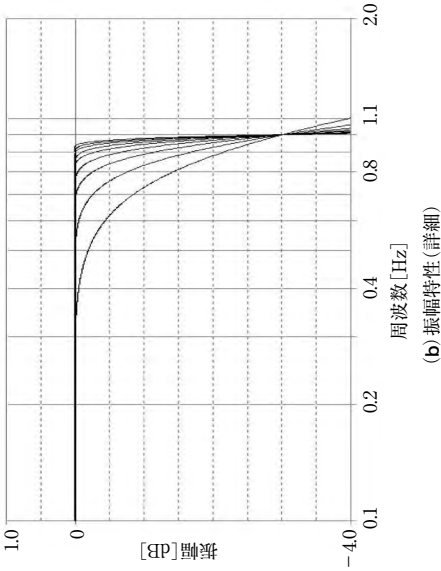
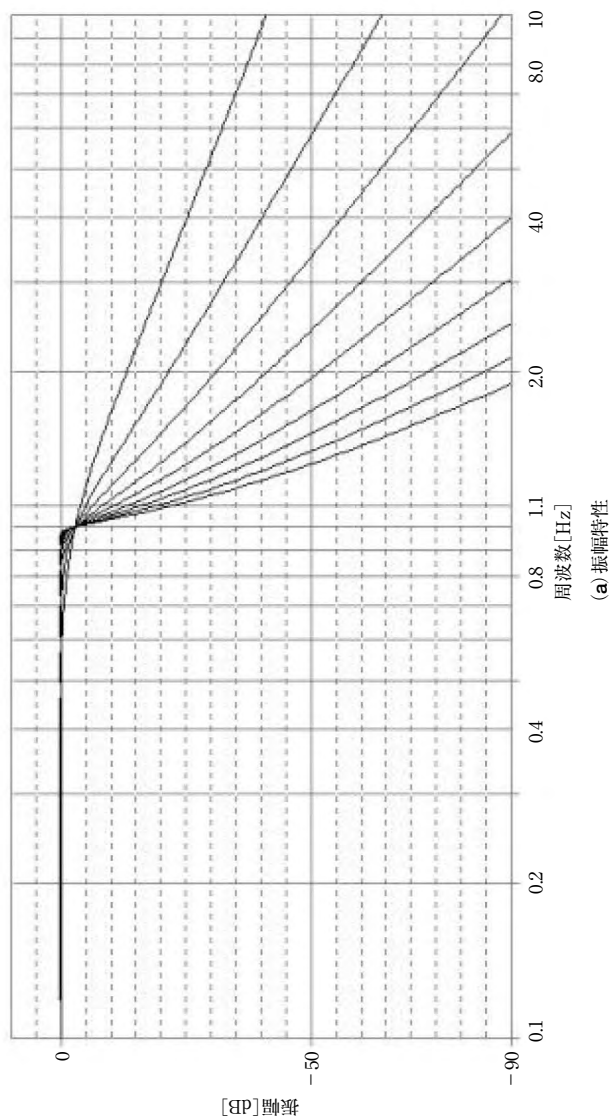


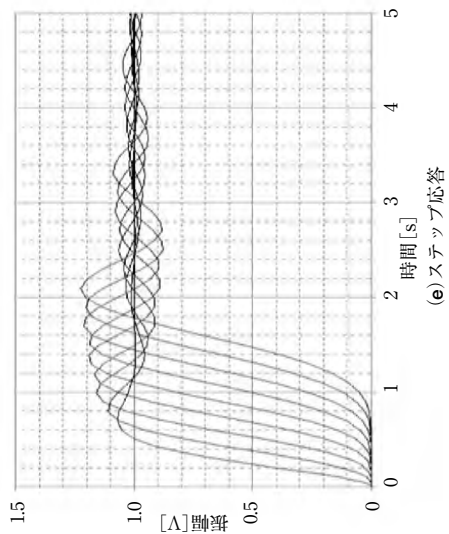
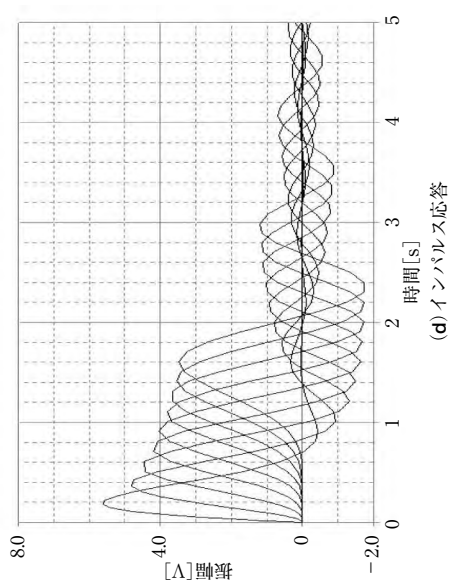
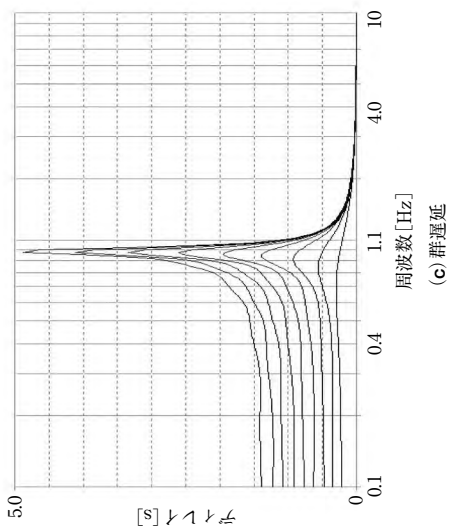
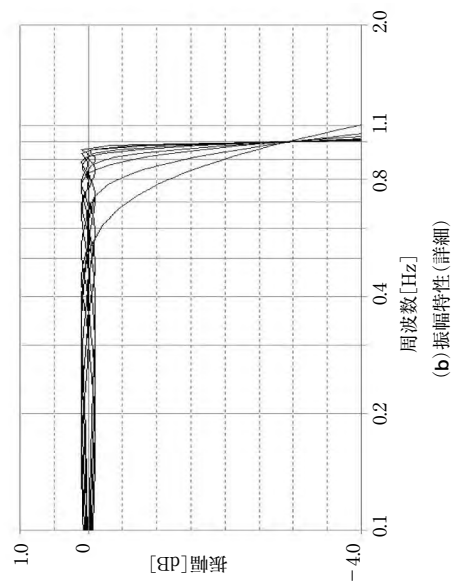
図 4-7 0.01 dB チェビシェフ特性



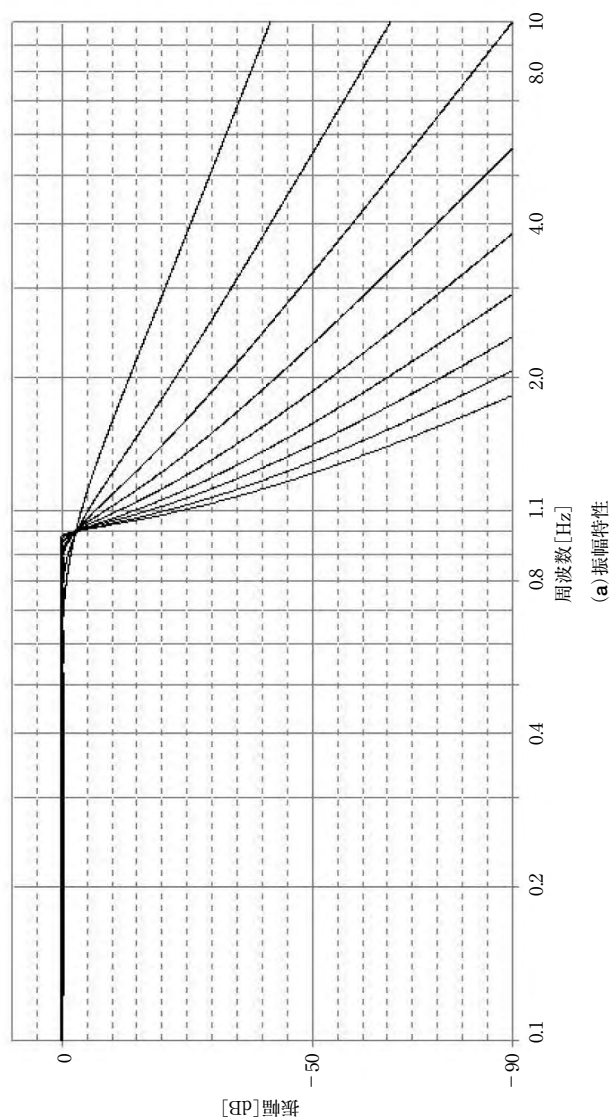


〈図 4-8〉0.1 dB チェビシェフ特性





〈図 4-9〉0.25 dB チェビシェフ特性



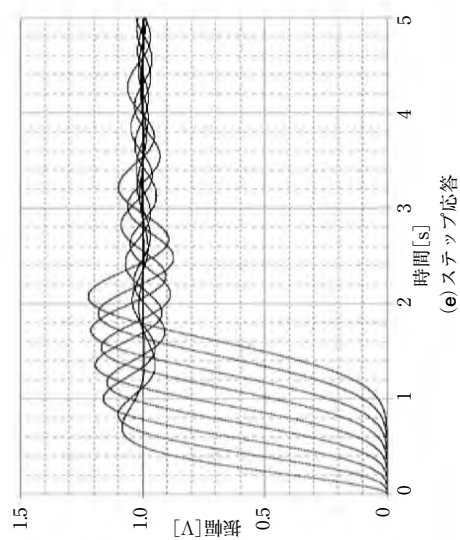
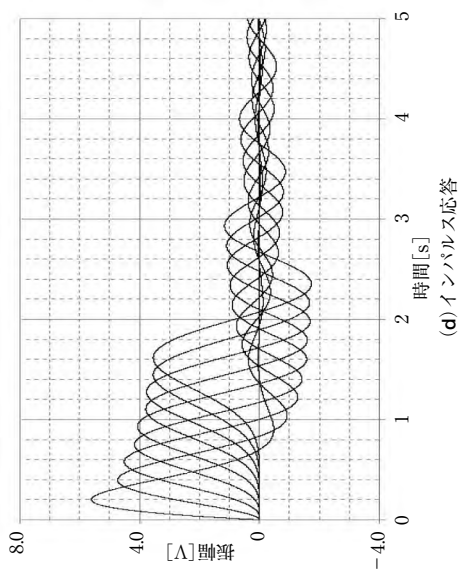
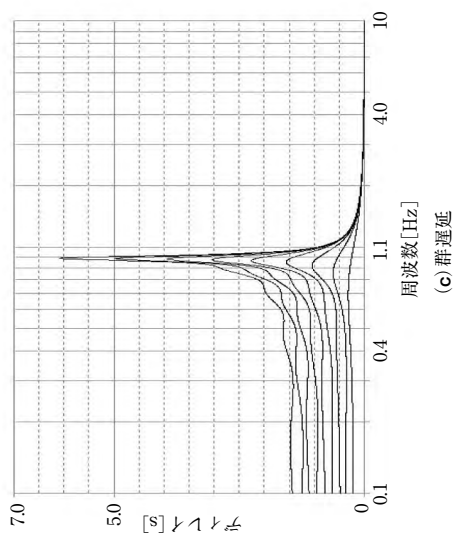
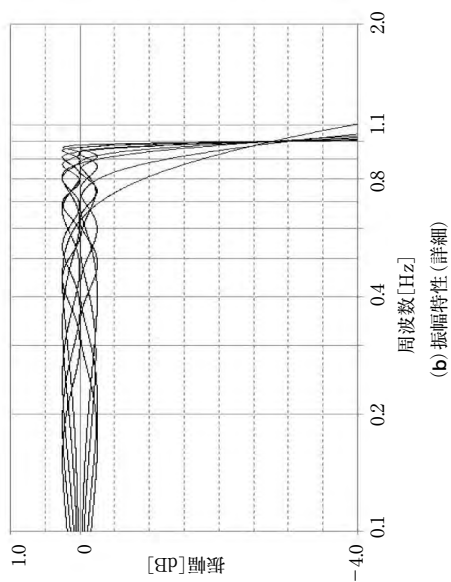
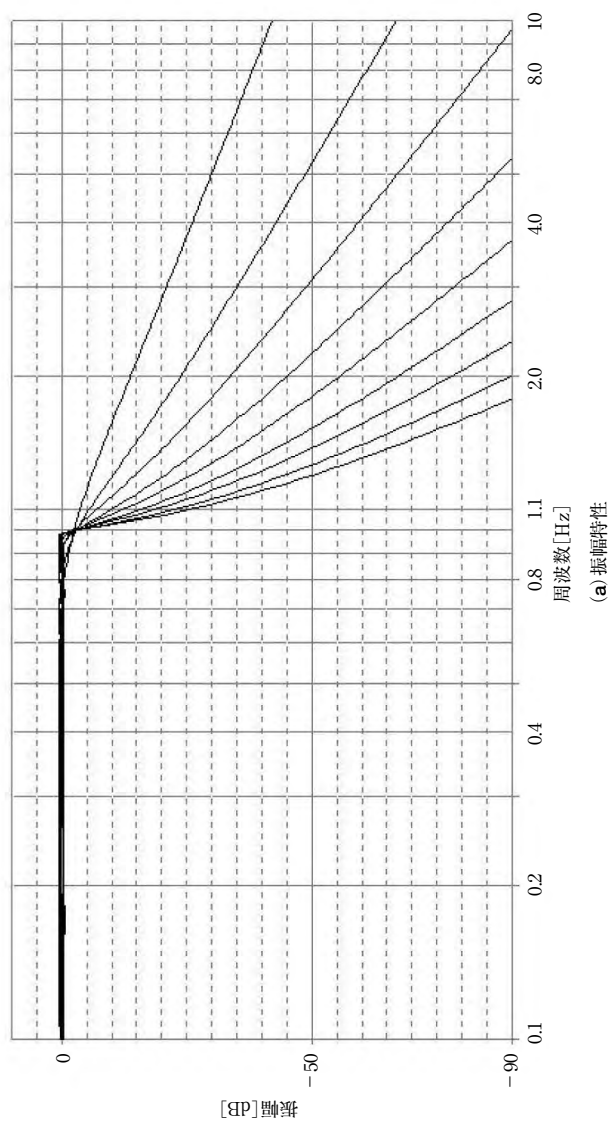
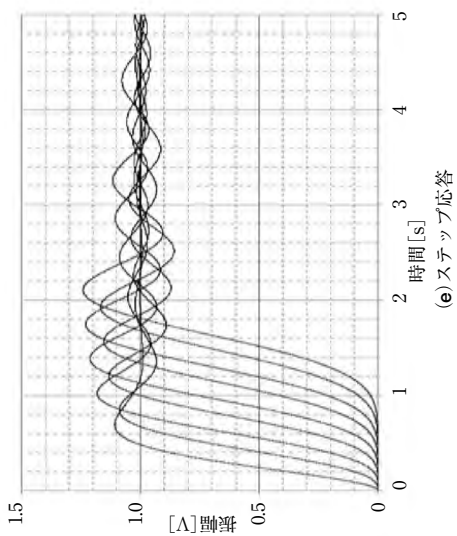
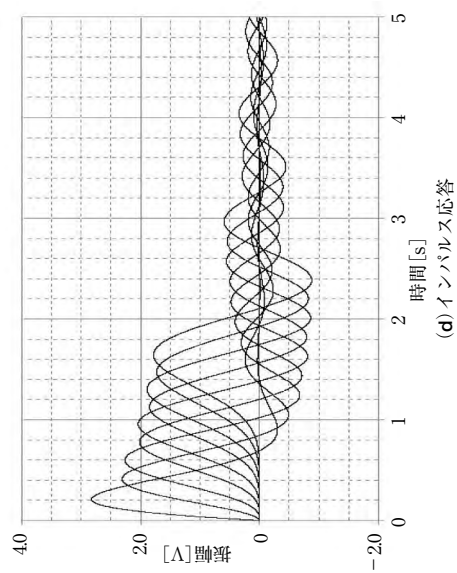
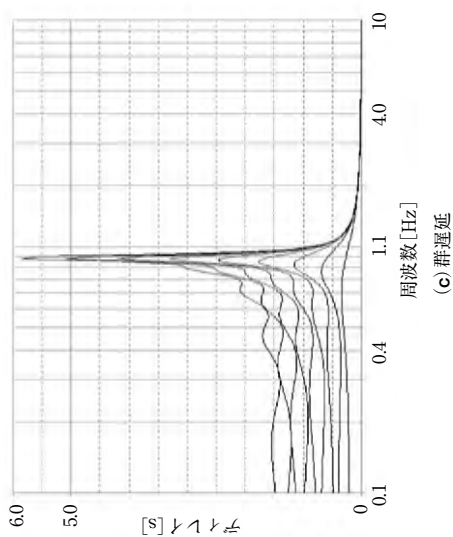
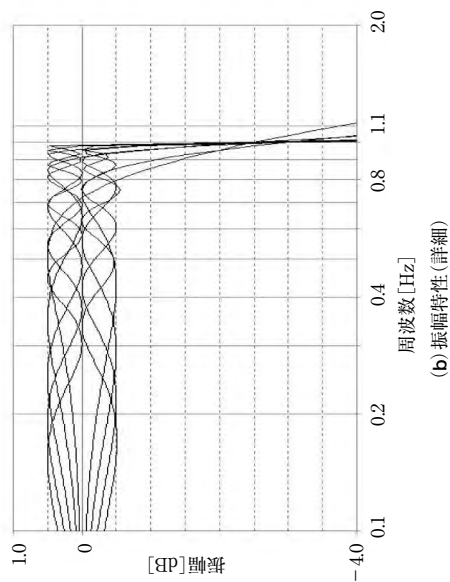
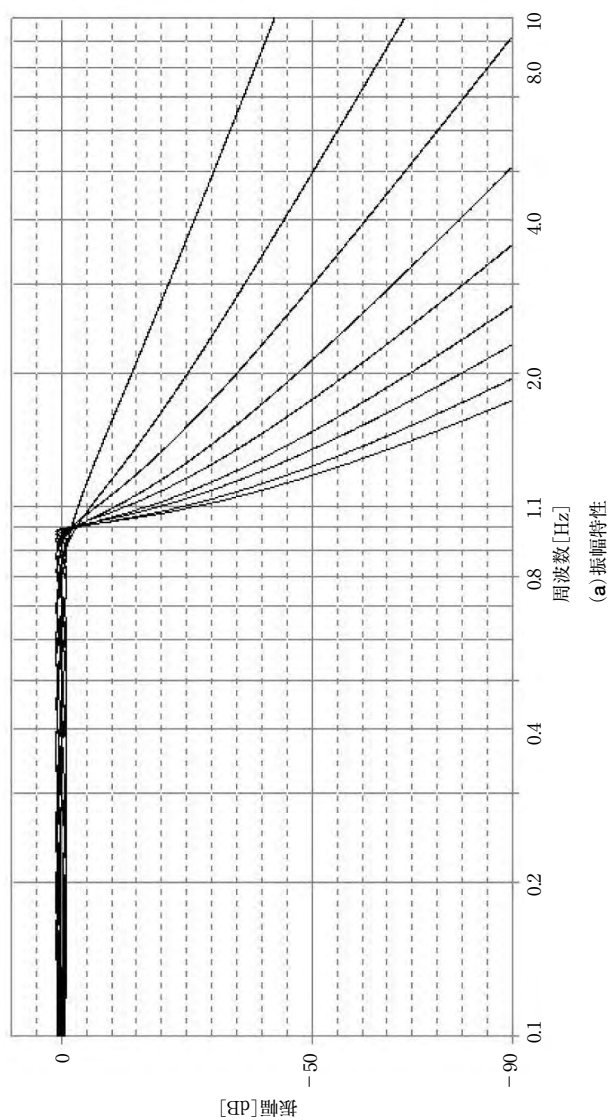


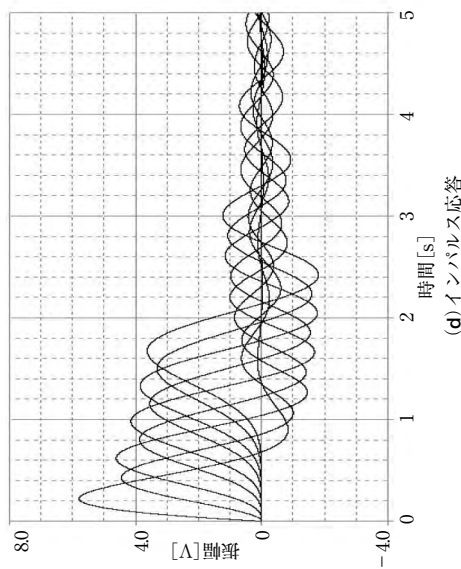
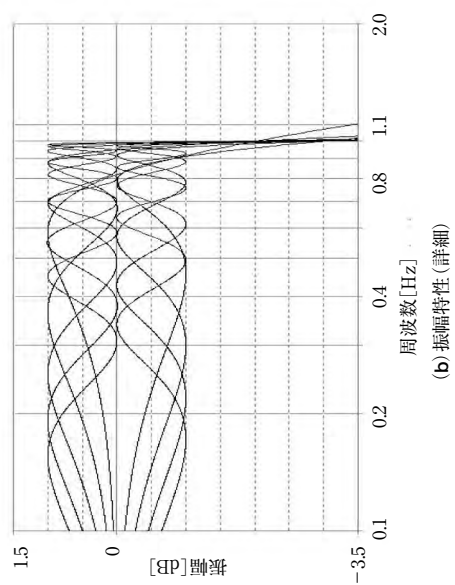
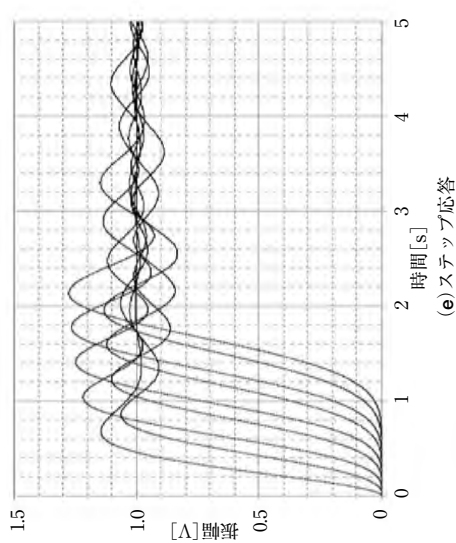
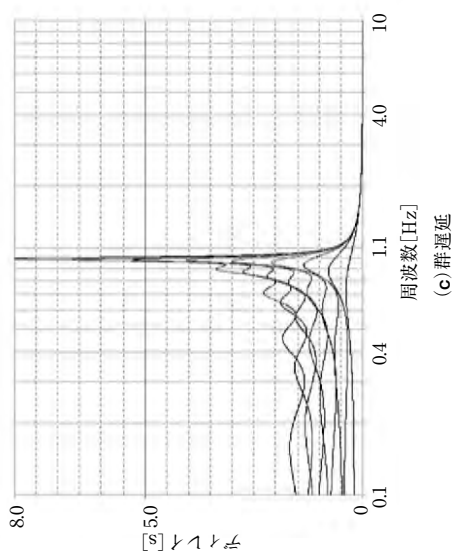
図 4-10 &gt;0.5 dB チェビシェフ特性



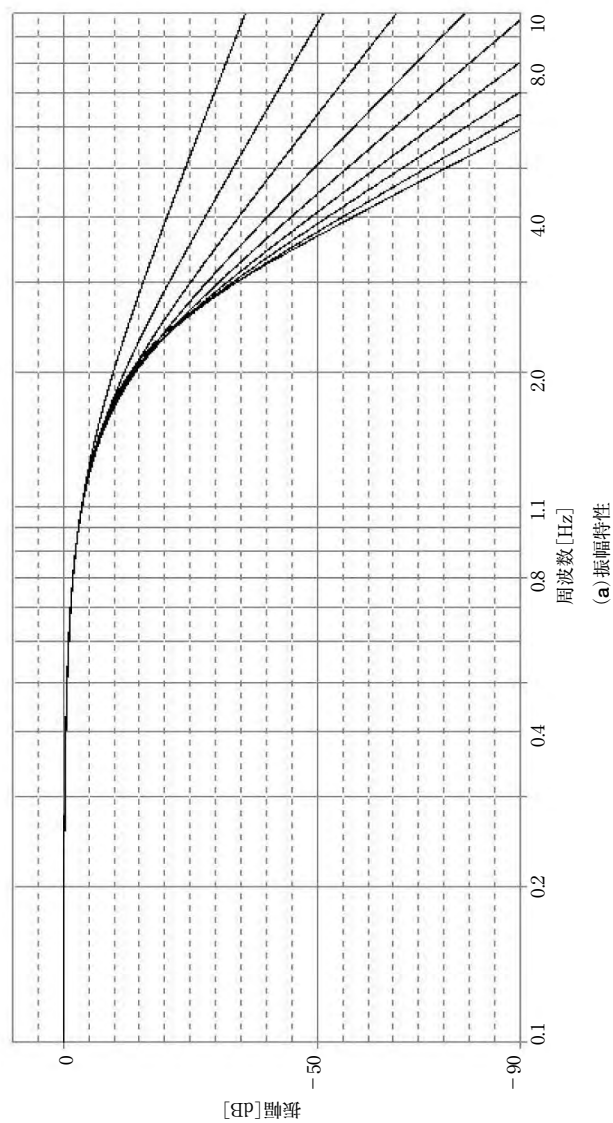


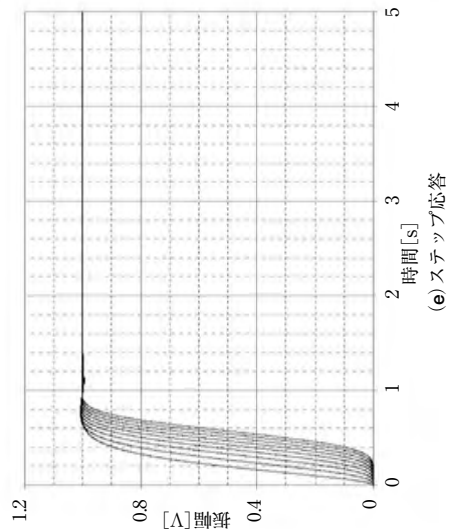
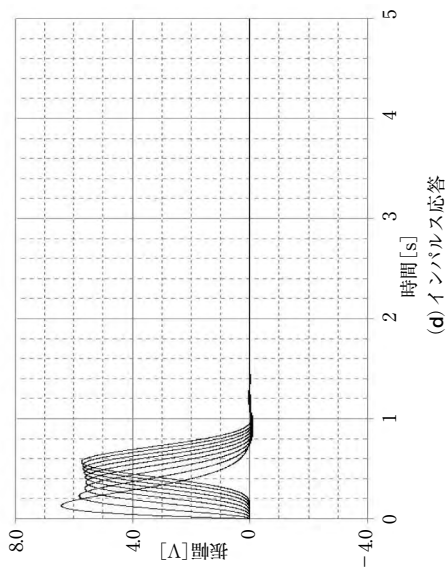
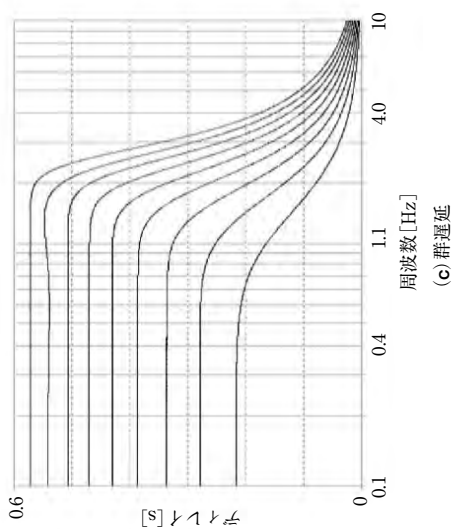
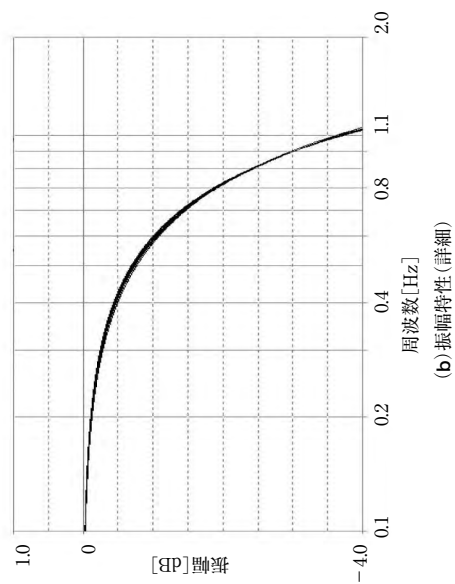
〈図 4-11〉1 dB チェビシェフ特性



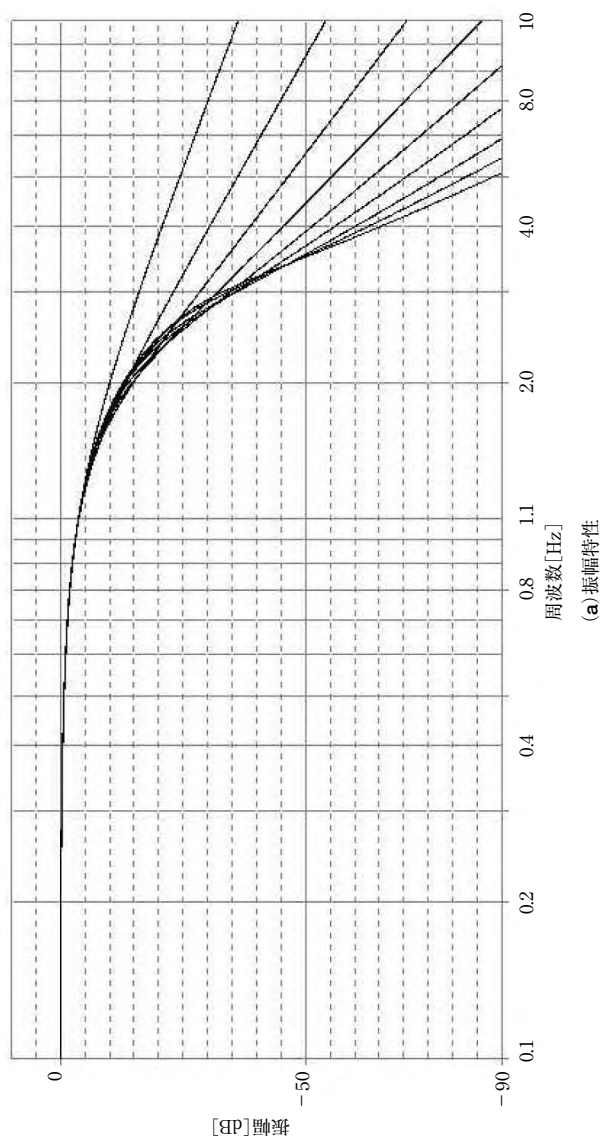


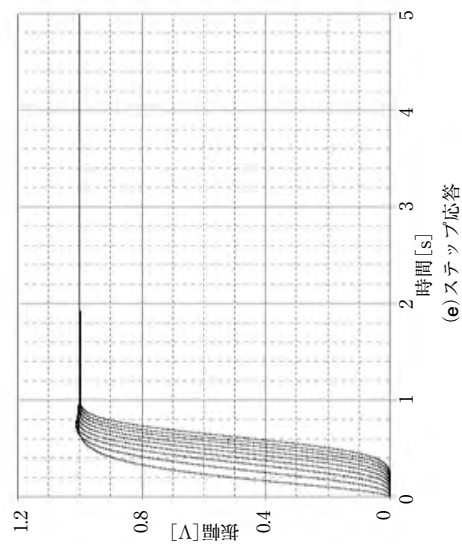
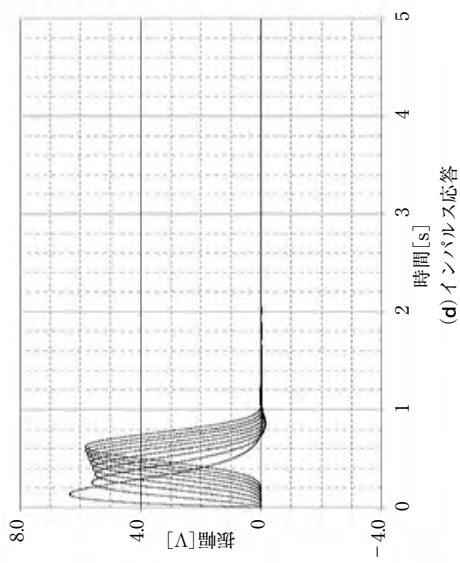
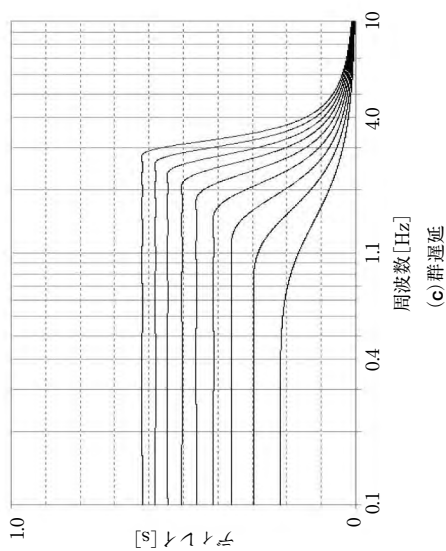
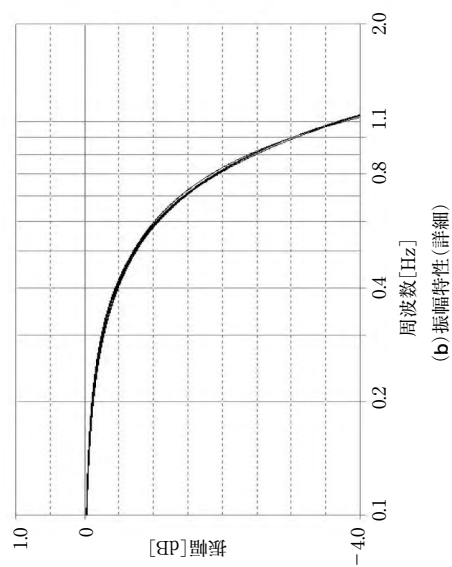
〈図 4-12〉ベッセル特性



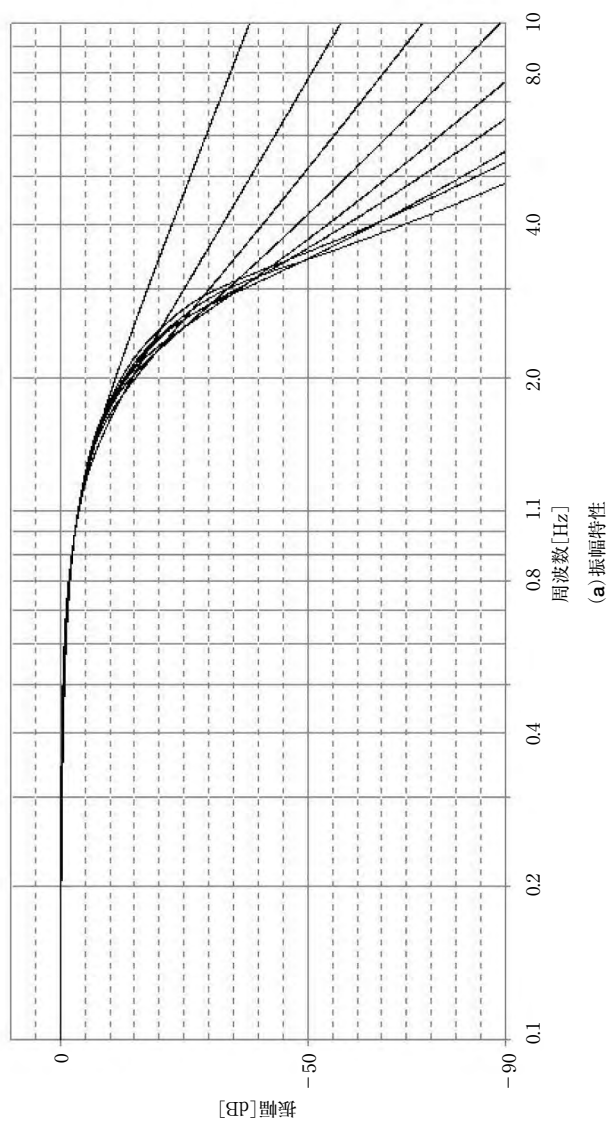


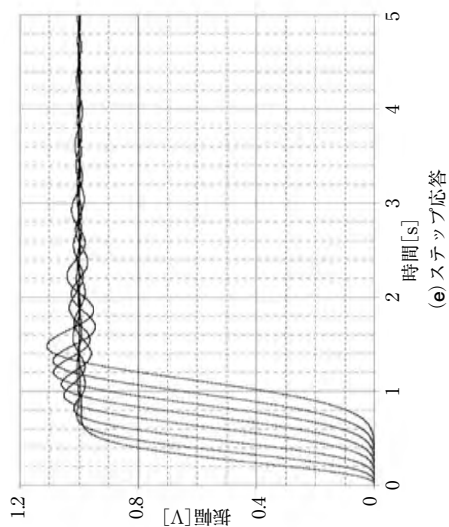
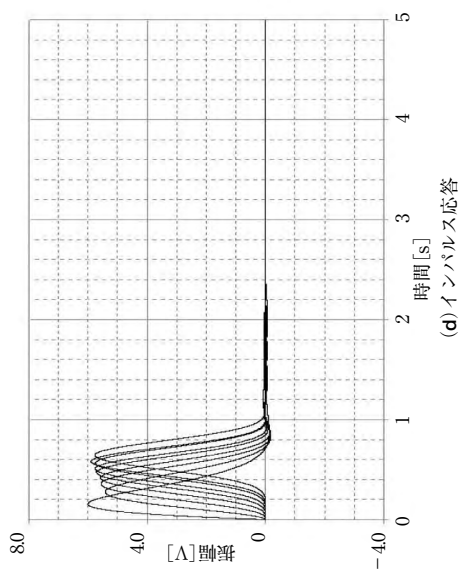
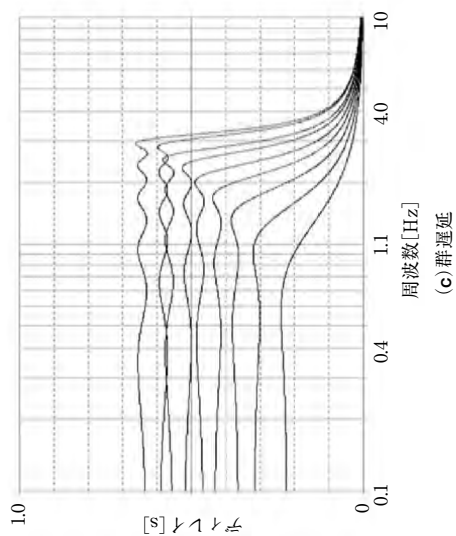
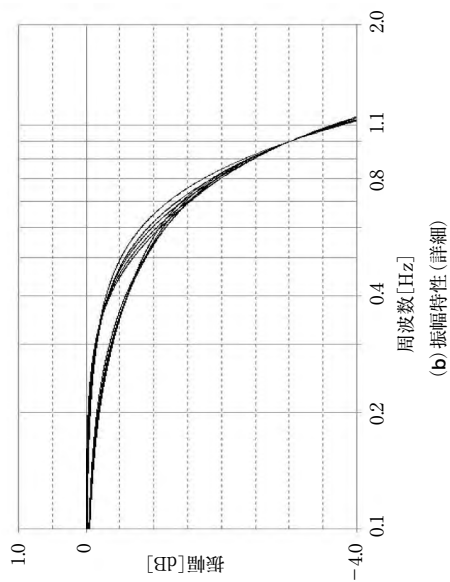
〈図 4-13〉等リプル誤差をもつ線形位相フィルタ特性 (リプル誤差  $0.05^\circ$ )



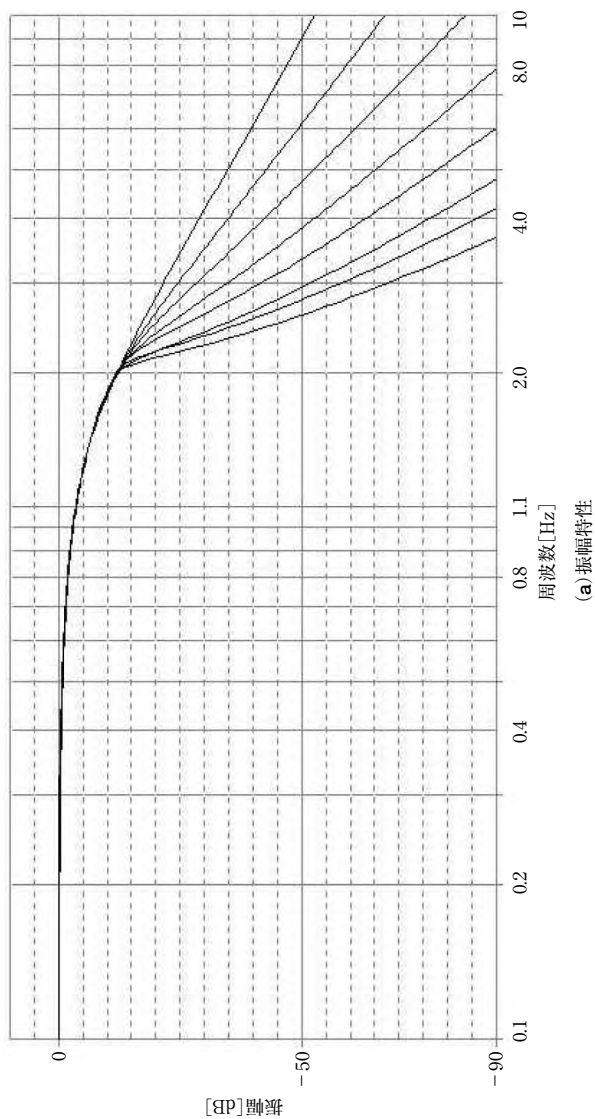


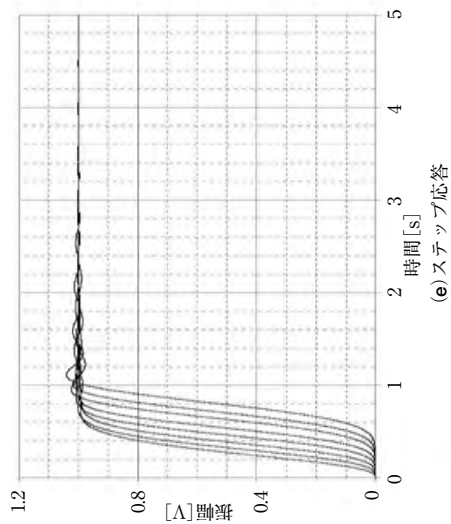
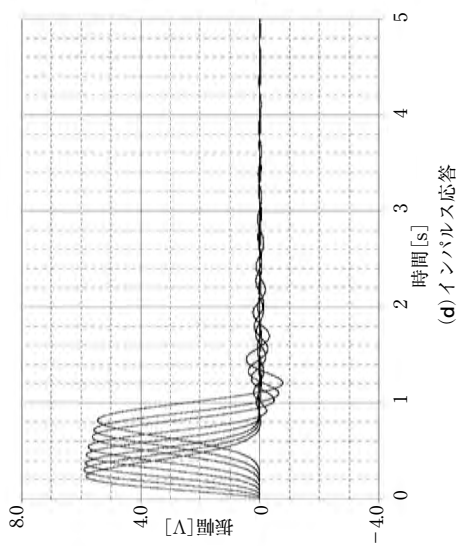
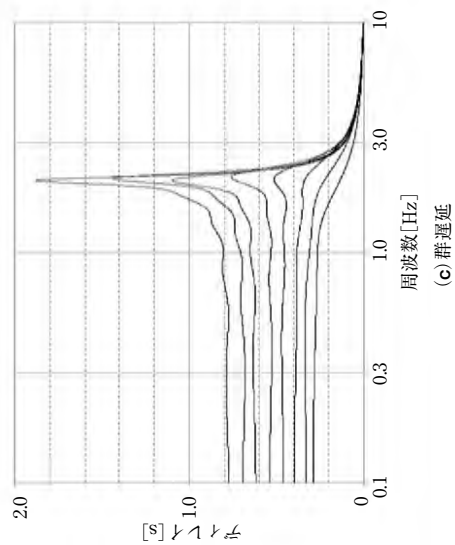
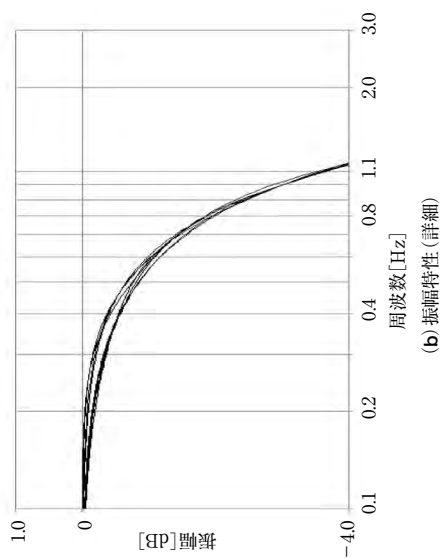
〈図4-14〉等リップル誤差をもつ線形位相フィルタ特性 (リップル誤差  $0.5^\circ$ )



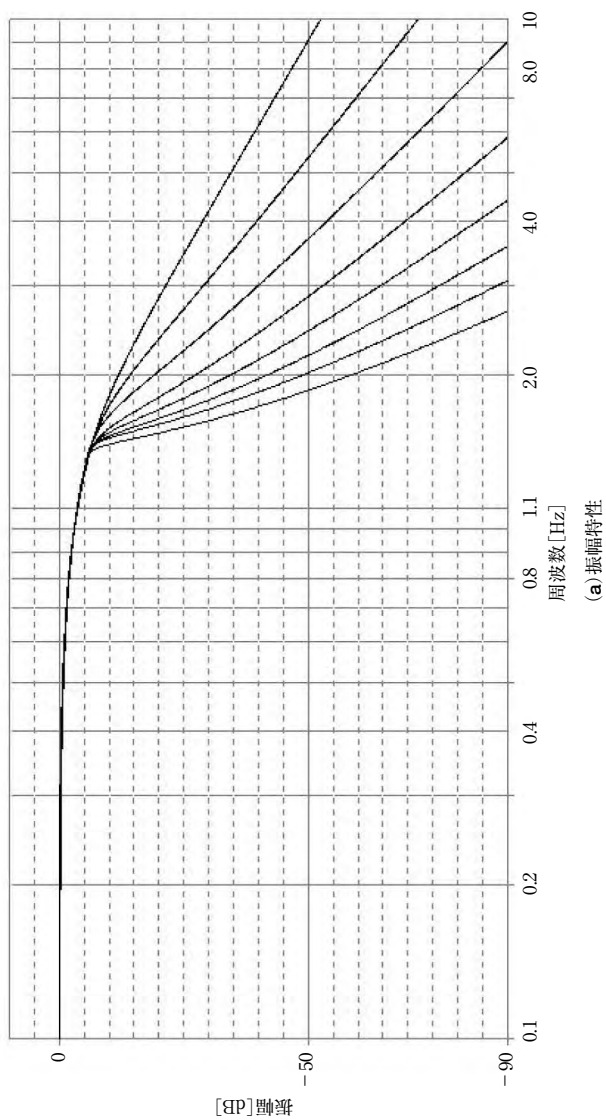


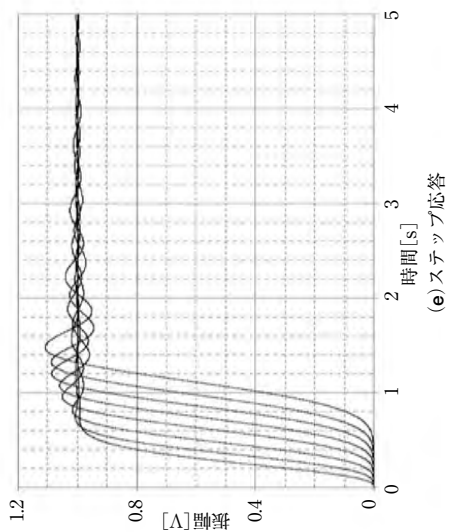
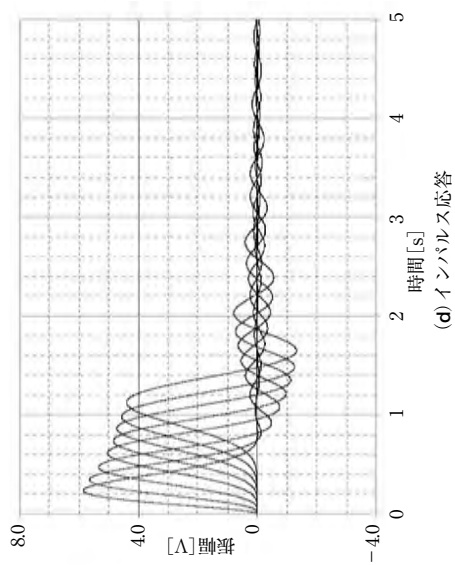
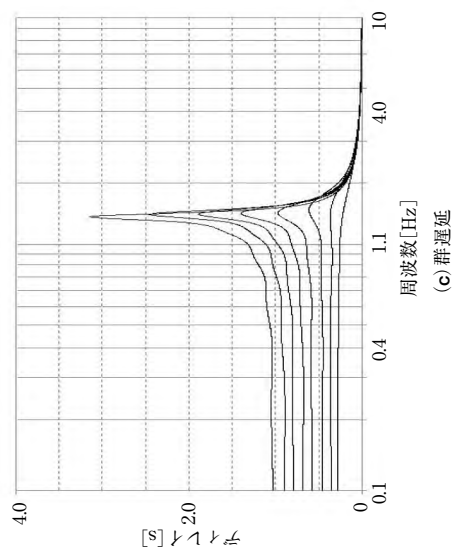
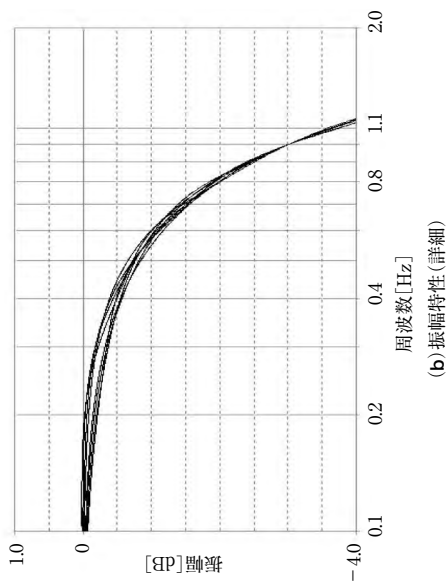
〈図 4-15〉 ガウス特性から 12 dB 減衰特性をもつトランジシヨナル・フィルタ特性





〈図 4-16〉ガウス特性から 6 dB 減衰特性をもつトランジシヨナル・フィルタ特性





〈表 4-2〉バタワース設計表

| 次数 $n$ | 段 | 実数部 $\alpha$ | 虚数部 $\beta$ | $f_0$  | $\alpha(1/Q)$ | $Q$    | -3 dB 周波数 | ピーキング周波数 | ピーキング・レベル |
|--------|---|--------------|-------------|--------|---------------|--------|-----------|----------|-----------|
| 2      | 1 | 0.7071       | 0.7071      | 1.0000 | 1.4142        | 0.7071 | 1.0000    |          |           |
| 3      | 1 | 0.5000       | 0.8660      | 1.0000 | 1.0000        | 1.0000 |           | 0.7071   | 1.2493    |
|        | 2 | 1.0000       |             | 1.0000 |               |        | 1.0000    |          |           |
| 4      | 1 | 0.9239       | 0.3827      | 1.0000 | 1.8478        | 0.5412 | 0.7195    |          |           |
|        | 2 | 0.3827       | 0.9239      | 1.0000 | 0.7654        | 1.3065 |           | 0.8409   | 3.0102    |
| 5      | 1 | 0.8090       | 0.5878      | 1.0000 | 1.6180        | 0.6180 | 0.8588    |          |           |
|        | 2 | 0.3090       | 0.9511      | 1.0000 | 0.6180        | 1.6182 |           | 0.8995   | 4.6163    |
|        | 3 | 1.0000       |             | 1.0000 |               |        | 1.0000    |          |           |
| 6      | 1 | 0.9659       | 0.2588      | 1.0000 | 1.9319        | 0.5176 | 0.6758    |          |           |
|        | 2 | 0.7071       | 0.7071      | 1.0000 | 1.4142        | 0.7071 | 1.0000    |          |           |
|        | 3 | 0.2588       | 0.9659      | 1.0000 | 0.5176        | 1.9319 |           | 0.9306   | 6.0210    |
| 7      | 1 | 0.9010       | 0.4339      | 1.0000 | 1.8019        | 0.5550 | 0.7449    |          |           |
|        | 2 | 0.6235       | 0.7818      | 1.0000 | 1.2470        | 0.8019 |           | 0.4717   | 0.2204    |
|        | 3 | 0.2225       | 0.9749      | 1.0000 | 0.4450        | 2.2471 |           | 0.9492   | 7.2530    |
|        | 4 | 1.0000       |             | 1.0000 |               |        | 1.0000    |          |           |
| 8      | 1 | 0.9808       | 0.1951      | 1.0000 | 1.9616        | 0.5098 | 0.6615    |          |           |
|        | 2 | 0.8315       | 0.5556      | 1.0000 | 1.6629        | 0.6013 | 0.8295    |          |           |
|        | 3 | 0.5556       | 0.8315      | 1.0000 | 1.1112        | 0.9000 |           | 0.6186   | 0.6876    |
|        | 4 | 0.1951       | 0.9808      | 1.0000 | 0.3902        | 2.5628 |           | 0.9612   | 8.3429    |
| 9      | 1 | 0.9397       | 0.3420      | 1.0000 | 1.8794        | 0.5321 | 0.7026    |          |           |
|        | 2 | 0.7660       | 0.6428      | 1.0000 | 1.5320        | 0.6527 | 0.9172    |          |           |
|        | 3 | 0.5000       | 0.8660      | 1.0000 | 1.0000        | 1.0000 |           | 0.7071   | 1.2493    |
|        | 4 | 0.1737       | 0.9848      | 1.0000 | 0.3474        | 2.8785 |           | 0.9694   | 9.3165    |
|        | 5 | 1.0000       |             | 1.0000 |               |        | 1.0000    |          |           |
| 10     | 1 | 0.9877       | 0.1564      | 1.0000 | 1.9754        | 0.5062 | 0.6549    |          |           |
|        | 2 | 0.8910       | 0.4540      | 1.0000 | 1.7820        | 0.5612 | 0.7564    |          |           |
|        | 3 | 0.7071       | 0.7071      | 1.0000 | 1.4142        | 0.7071 | 1.0000    |          |           |
|        | 4 | 0.4540       | 0.8910      | 1.0000 | 0.9080        | 1.1013 |           | 0.7667   | 1.8407    |
|        | 5 | 0.1564       | 0.9877      | 1.0000 | 0.3128        | 3.1970 |           | 0.9752   | 10.2023   |

〈表 4-3〉0.01 dB チェビシェフ設計表

| 次数 $n$ | 段 | 実数部 $\alpha$ | 虚数部 $\beta$ | $f_0$  | $\alpha(1/Q)$ | $Q$    | - 3 dB 周波数 | ピーキング周波数 | ピーキング・レベル |
|--------|---|--------------|-------------|--------|---------------|--------|------------|----------|-----------|
| 2      | 1 | 0.6743       | 0.7075      | 0.9774 | 1.3798        | 0.7247 |            | 0.2142   | 0.0100    |
| 3      | 1 | 0.4233       | 0.8663      | 0.9642 | 0.8780        | 1.1389 |            | 0.7558   | 2.0595    |
|        | 2 | 0.8467       |             | 0.8467 |               |        | 0.8467     |          |           |
| 4      | 1 | 0.6762       | 0.3828      | 0.7770 | 1.7405        | 0.5746 |            |          |           |
|        | 2 | 0.2801       | 0.9241      | 0.9656 | 0.5801        | 1.7237 | 0.6069     | 0.8806   | 5.1110    |
| 5      | 1 | 0.5120       | 0.5879      | 0.7796 | 1.3135        | 0.7613 |            | 0.2889   | 0.0827    |
|        | 2 | 0.1956       | 0.9512      | 0.9711 | 0.4028        | 2.4824 |            | 0.9309   | 8.0772    |
|        | 3 | 0.6328       |             | 0.6328 |               |        | 0.6328     |          |           |
| 6      | 1 | 0.5335       | 0.2588      | 0.5930 | 1.7995        | 0.5557 | 0.4425     |          |           |
|        | 2 | 0.3906       | 0.7072      | 0.8079 | 0.9670        | 1.0342 |            | 0.5895   | 1.4482    |
|        | 3 | 0.1430       | 0.9660      | 0.9765 | 0.2929        | 3.4144 |            | 0.9554   | 10.7605   |
| 7      | 1 | 0.4393       | 0.4339      | 0.6175 | 1.4229        | 0.7028 | 0.6136     |          |           |
|        | 2 | 0.3040       | 0.7819      | 0.8389 | 0.7247        | 1.3798 |            | 0.7204   | 3.4077    |
|        | 3 | 0.1085       | 0.9750      | 0.9810 | 0.2212        | 4.5208 |            | 0.9689   | 13.1578   |
|        | 4 | 0.4876       |             | 0.4876 |               |        | 0.4876     |          |           |
| 8      | 1 | 0.4268       | 0.1951      | 0.4693 | 1.8190        | 0.5498 | 0.3451     |          |           |
|        | 2 | 0.3168       | 0.5556      | 0.6396 | 0.9907        | 1.0094 |            | 0.4564   | 1.3041    |
|        | 3 | 0.2418       | 0.8315      | 0.8659 | 0.5585        | 1.7906 |            | 0.7956   | 5.4126    |
|        | 4 | 0.0849       | 0.9808      | 0.9845 | 0.1725        | 5.7978 |            | 0.9771   | 15.2977   |
| 9      | 1 | 0.3686       | 0.3420      | 0.5028 | 1.4661        | 0.6821 | 0.4844     |          |           |
|        | 2 | 0.3005       | 0.6428      | 0.7096 | 0.8470        | 1.1807 |            | 0.5682   | 2.3008    |
|        | 3 | 0.1961       | 0.8661      | 0.8880 | 0.4417        | 2.2642 |            | 0.8436   | 7.3155    |
|        | 4 | 0.0681       | 0.9848      | 0.9872 | 0.1380        | 7.2478 |            | 0.9824   | 17.2249   |
|        | 5 | 0.3923       |             | 0.3923 |               |        | 0.3923     |          |           |
| 10     | 1 | 0.3522       | 0.1564      | 0.3854 | 1.8279        | 0.5471 | 0.2814     |          |           |
|        | 2 | 0.3178       | 0.454       | 0.5542 | 1.1469        | 0.8719 |            | 0.3242   | 0.5412    |
|        | 3 | 0.2522       | 0.7071      | 0.7507 | 0.6719        | 1.4884 |            | 0.6606   | 3.9742    |
|        | 4 | 0.1619       | 0.891       | 0.9056 | 0.3576        | 2.7968 |            | 0.8762   | 9.0742    |
|        | 5 | 0.0558       | 0.9877      | 0.9893 | 0.1128        | 8.8645 |            | 0.9861   | 18.9669   |

〈表4-4〉0.1 dB チェビシェフ設計表

| 次数 $n$ | 段 | 実数部 $\alpha$ | 虚数部 $\beta$ | $f_0$  | $\alpha(1/Q)$ | $Q$     | - 3 dB 周波数 | ピーキング周波数 | ピーキング・レベル |
|--------|---|--------------|-------------|--------|---------------|---------|------------|----------|-----------|
| 2      | 1 | 0.6104       | 0.7106      | 0.9368 | 1.3032        | 0.7673  |            | 0.3638   | 0.0999    |
| 3      | 1 | 0.3490       | 0.8684      | 0.9359 | 0.7458        | 1.3408  |            |          | 3.1978    |
|        | 2 | 0.6970       |             | 0.6970 |               |         | 0.6970     |          |           |
| 4      | 1 | 0.2177       | 0.9254      | 0.9507 | 0.4580        | 2.1834  |            |          | 7.0167    |
|        | 2 | 0.5257       | 0.3833      | 0.6506 | 1.6160        | 0.6188  | 0.5596     | 0.8994   |           |
| 5      | 1 | 0.3842       | 0.5884      | 0.7027 | 1.0935        | 0.9145  |            |          | 0.7662    |
|        | 2 | 0.1468       | 0.9521      | 0.9634 | 0.3048        | 3.2812  |            | 0.9407   | 10.4226   |
|        | 3 | 0.4749       |             | 0.4749 |               |         | 0.4749     |          |           |
| 6      | 1 | 0.3916       | 0.2590      | 0.4695 | 1.6682        | 0.5995  | 0.3879     |          |           |
|        | 2 | 0.2867       | 0.7077      | 0.7636 | 0.7509        | 1.3316  |            | 0.6470   | 3.1478    |
|        | 3 | 0.1049       | 0.9667      | 0.9724 | 0.2158        | 4.6348  |            | 0.9610   | 13.3714   |
| 7      | 1 | 0.3178       | 0.4341      | 0.5380 | 1.1814        | 0.8464  |            |          | 0.4157    |
|        | 2 | 0.2200       | 0.7823      | 0.8126 | 0.5414        | 1.8469  |            | 0.7507   | 5.6595    |
|        | 3 | 0.0785       | 0.9755      | 0.9787 | 0.1604        | 6.2335  |            | 0.9723   | 15.9226   |
|        | 4 | 0.3528       |             | 0.3528 |               |         | 0.3528     |          |           |
| 8      | 1 | 0.3058       | 0.1952      | 0.3628 | 1.6858        | 0.5932  | 0.2956     |          |           |
|        | 2 | 0.2529       | 0.5558      | 0.6106 | 0.8283        | 1.2073  |            | 0.4949   | 2.4532    |
|        | 3 | 0.1732       | 0.8319      | 0.8497 | 0.4077        | 2.4531  |            | 0.8137   | 7.9784    |
|        | 4 | 0.0608       | 0.9812      | 0.9831 | 0.1237        | 8.0819  |            | 0.9793   | 18.1669   |
| 9      | 1 | 0.2622       | 0.3421      | 0.4310 | 1.2166        | 0.8219  |            |          | 0.3037    |
|        | 2 | 0.2137       | 0.6430      | 0.6776 | 0.6308        | 1.5854  |            | 0.6064   | 4.4576    |
|        | 3 | 0.1395       | 0.8663      | 0.8775 | 0.3180        | 3.1450  |            | 0.8550   | 10.0636   |
|        | 4 | 0.0485       | 0.9852      | 0.9864 | 0.0982        | 10.1795 |            | 0.9840   | 20.1650   |
|        | 5 | 0.2790       |             | 0.2790 |               |         | 0.2790     |          |           |
| 10     | 1 | 0.2493       | 0.1564      | 0.2943 | 1.6942        | 0.5902  | 0.2382     |          |           |
|        | 2 | 0.2249       | 0.4541      | 0.5067 | 0.8876        | 1.1266  |            | 0.3945   | 1.9880    |
|        | 3 | 0.1785       | 0.7073      | 0.7295 | 0.4894        | 2.0434  |            | 0.6844   | 6.4750    |
|        | 4 | 0.1146       | 0.8913      | 0.8986 | 0.2551        | 3.9208  |            | 0.8839   | 11.9386   |
|        | 5 | 0.0395       | 0.9880      | 0.9888 | 0.0799        | 12.5163 |            | 0.9872   | 21.9565   |

〈表 4-5〉0.25 dB チェビシェフ設計表

| 次数 $n$ | 段 | 実数部 $\alpha$ | 虚数部 $\beta$ | $f_0$  | $\alpha(1/Q)$ | $Q$     | -3 dB 周波数 | ピーキング周波数 | ピーキング・レベル |
|--------|---|--------------|-------------|--------|---------------|---------|-----------|----------|-----------|
| 2      | 1 | 0.5621       | 0.7154      | 0.9098 | 1.2356        | 0.8093  |           | 0.4425   | 0.2502    |
| 3      | 1 | 0.3062       | 0.8712      | 0.9234 | 0.6632        | 1.5079  |           | 0.8156   | 4.0734    |
|        | 2 | 0.6124       |             | 0.6124 |               |         | 0.6124    |          |           |
| 4      | 1 | 0.4501       | 0.3840      | 0.5916 | 1.5215        | 0.6572  |           |          |           |
|        | 2 | 0.1865       | 0.9272      | 0.9458 | 0.3944        | 2.3356  | 0.5470    | 0.9082   | 8.2538    |
| 5      | 1 | 0.3247       | 0.5892      | 0.6727 | 0.9653        | 1.0359  |           |          |           |
|        | 2 | 0.1240       | 0.9533      | 0.9613 | 0.2580        | 3.8763  |           | 0.4917   | 1.4585    |
|        | 3 | 0.4013       |             | 0.4013 |               |         | 0.4013    | 0.9452   | 11.8413   |
| 6      | 1 | 0.3284       | 0.2593      | 0.4184 | 1.5697        | 0.6371  | 0.3730    |          |           |
|        | 2 | 0.2404       | 0.7083      | 0.7480 | 0.6428        | 1.5557  |           | 0.6663   | 4.3121    |
|        | 3 | 0.0880       | 0.9675      | 0.9715 | 0.1811        | 5.5205  |           | 0.9635   | 14.8753   |
| 7      | 1 | 0.2652       | 0.4344      | 0.5090 | 1.0421        | 0.9596  |           | 0.3441   | 1.0173    |
|        | 2 | 0.1835       | 0.7828      | 0.8040 | 0.4565        | 2.1908  |           | 0.7610   | 7.0443    |
|        | 3 | 0.0655       | 0.9761      | 0.9783 | 0.1339        | 7.4679  |           | 0.9739   | 17.4835   |
|        | 4 | 0.2944       |             | 0.2944 |               |         | 0.2944    |          |           |
| 8      | 1 | 0.2543       | 0.1953      | 0.3206 | 1.5862        | 0.6304  | 0.2822    |          |           |
|        | 2 | 0.2156       | 0.5561      | 0.5964 | 0.7230        | 1.3832  |           | 0.5126   | 3.4258    |
|        | 3 | 0.1441       | 0.8323      | 0.8447 | 0.3412        | 2.9309  |           | 0.8197   | 9.4683    |
|        | 4 | 0.0506       | 0.9817      | 0.9830 | 0.1029        | 9.7173  |           | 0.9804   | 19.7624   |
| 9      | 1 | 0.2176       | 0.3423      | 0.4056 | 1.0730        | 0.9320  |           | 0.2642   | 0.8624    |
|        | 2 | 0.1774       | 0.6433      | 0.6673 | 0.5317        | 1.8808  |           | 0.6184   | 5.8052    |
|        | 3 | 0.1158       | 0.8667      | 0.8744 | 0.2649        | 3.7755  |           | 0.8589   | 11.6163   |
|        | 4 | 0.0402       | 0.9856      | 0.9864 | 0.0815        | 12.2659 |           | 0.9848   | 21.7812   |
|        | 5 | 0.2315       |             | 0.2315 |               |         | 0.2315    |          |           |
| 10     | 1 | 0.2065       | 0.1565      | 0.2591 | 1.5940        | 0.6274  | 0.2267    |          |           |
|        | 2 | 0.1863       | 0.4543      | 0.4910 | 0.7588        | 1.3178  |           | 0.4143   | 3.0721    |
|        | 3 | 0.1478       | 0.7075      | 0.7228 | 0.4090        | 2.4451  |           | 0.6919   | 7.9515    |
|        | 4 | 0.0949       | 0.8915      | 0.8965 | 0.2117        | 4.7236  |           | 0.8864   | 13.5344   |
|        | 5 | 0.0327       | 0.9883      | 0.9888 | 0.0661        | 15.1199 |           | 0.9878   | 23.5957   |

〈表 4-6〉0.5 dB チェビシェフ設計表

| 次数 $n$ | 段 | 実数部 $\alpha$ | 虚数部 $\beta$ | $f_0$  | $\alpha(1/Q)$ | $Q$     | - 3 dB 周波数 | ピーキング周波数 | ピーキング・レベル |
|--------|---|--------------|-------------|--------|---------------|---------|------------|----------|-----------|
| 2      | 1 | 0.5129       | 0.7225      | 1.2314 | 1.1577        | 0.8638  |            | 0.7072   | 0.5002    |
| 3      | 1 | 0.2683       | 0.8753      | 1.0688 | 0.5861        | 1.7061  |            |          | 5.0301    |
|        | 2 | 0.5366       |             | 0.6265 |               |         | 0.6265     | 0.9727   |           |
| 4      | 1 | 0.3872       | 0.3850      | 0.5969 | 1.4182        | 0.7051  |            |          |           |
|        | 2 | 0.1605       | 0.9297      | 1.0313 | 0.3402        | 2.9391  | 0.5951     | 1.0010   | 9.4918    |
| 5      | 1 | 0.2767       | 0.5902      | 0.6905 | 0.8490        | 1.1779  |            |          |           |
|        | 2 | 0.1057       | 0.9550      | 1.0178 | 0.2200        | 4.5451  |            | 0.5522   | 2.2849    |
|        | 3 | 0.3420       |             | 0.3623 |               |         | 0.3623     | 1.0054   | 13.2037   |
| 6      | 1 | 0.2784       | 0.2596      | 0.3963 | 1.4627        | 0.6836  | 0.3827     |          |           |
|        | 2 | 0.2037       | 0.7091      | 0.7680 | 0.5522        | 1.8109  |            | 0.7071   | 5.5025    |
|        | 3 | 0.0746       | 0.9687      | 1.0114 | 0.1536        | 6.5119  |            | 1.0055   | 16.2998   |
| 7      | 1 | 0.2241       | 0.4349      | 0.5040 | 0.9161        | 1.0916  |            | 0.3839   | 1.7838    |
|        | 2 | 0.1550       | 0.7836      | 0.8228 | 0.3881        | 2.5767  |            | 0.7912   | 8.3880    |
|        | 3 | 0.0553       | 0.9771      | 1.0081 | 0.1130        | 8.8487  |            | 1.0049   | 18.9515   |
|        | 4 | 0.2487       |             | 0.2562 |               |         | 0.2562     |          |           |
| 8      | 1 | 0.2144       | 0.1955      | 0.2968 | 1.4779        | 0.6767  | 0.2835     |          |           |
|        | 2 | 0.1817       | 0.5565      | 0.5989 | 0.6208        | 1.6109  |            | 0.5381   | 4.5815    |
|        | 3 | 0.1214       | 0.8328      | 0.8610 | 0.2885        | 3.4662  |            | 0.8429   | 10.8885   |
|        | 4 | 0.0426       | 0.9824      | 1.0060 | 0.0867        | 11.5305 |            | 1.0041   | 21.2452   |
| 9      | 1 | 0.1831       | 0.3425      | 0.3954 | 0.9429        | 1.0605  |            | 0.2947   | 1.6023    |
|        | 2 | 0.1493       | 0.6436      | 0.6727 | 0.4520        | 2.2126  |            | 0.6374   | 7.1258    |
|        | 3 | 0.0974       | 0.8671      | 0.8884 | 0.2233        | 4.4779  |            | 0.8773   | 13.0759   |
|        | 4 | 0.0338       | 0.9861      | 1.0046 | 0.0686        | 14.5829 |            | 1.0034   | 23.2820   |
|        | 5 | 0.1949       |             | 0.1984 |               |         | 0.1984     |          |           |
| 10     | 1 | 0.1736       | 0.1566      | 0.2338 | 1.4851        | 0.6734  | 0.2221     |          |           |
|        | 2 | 0.1566       | 0.4545      | 0.4807 | 0.6515        | 1.5349  |            | 0.4267   | 4.2087    |
|        | 3 | 0.1243       | 0.7078      | 0.7186 | 0.3459        | 2.8907  |            | 0.6968   | 9.3520    |
|        | 4 | 0.0798       | 0.8919      | 0.8955 | 0.1782        | 5.6107  |            | 0.8883   | 15.0149   |
|        | 5 | 0.0275       | 0.9887      | 0.9891 | 0.0556        | 17.9833 |            | 0.9883   | 25.1008   |

〈表4-7〉1 dB チェビシェフ設計表

| 次数 $n$ | 段 | 実数部 $\alpha$ | 虚数部 $\beta$ | $f_0$  | $\alpha(1/Q)$ | $Q$     | - 3 dB 周波数 | ピーキング周波数 | ピーキング・レベル |
|--------|---|--------------|-------------|--------|---------------|---------|------------|----------|-----------|
| 2      | 1 | 0.4508       | 0.7351      | 0.8623 | 1.0456        | 0.9564  |            | 0.5806   | 0.9995    |
| 3      | 1 | 0.2257       | 0.8822      | 0.9106 | 0.4957        | 2.0173  |            | 0.8528   | 6.3708    |
|        | 2 | 0.4513       |             | 0.4513 |               |         | 0.4513     |          |           |
| 4      | 1 | 0.3199       | 0.3868      | 0.5019 | 1.2746        | 0.7845  |            | 0.2174   | 0.1557    |
|        | 2 | 0.1325       | 0.9339      | 0.9433 | 0.2809        | 3.5594  |            | 0.9245   | 11.1142   |
| 5      | 1 | 0.2265       | 0.5918      | 0.6337 | 0.7149        | 1.3988  |            | 0.5467   | 3.5089    |
|        | 2 | 0.0865       | 0.9575      | 0.9614 | 0.1800        | 5.5559  |            | 0.9536   | 14.9305   |
|        | 3 | 0.2800       |             | 0.2800 |               |         | 0.2800     |          |           |
| 6      | 1 | 0.2268       | 0.2601      | 0.3451 | 1.3144        | 0.7608  |            | 0.1273   | 0.0813    |
|        | 2 | 0.1550       | 0.7106      | 0.7273 | 0.4262        | 2.3462  |            | 0.6935   | 7.6090    |
|        | 3 | 0.0608       | 0.9707      | 0.9726 | 0.1249        | 8.0036  |            | 0.9688   | 18.0827   |
| 7      | 1 | 0.1819       | 0.4354      | 0.4719 | 0.7710        | 1.2971  |            | 0.3956   | 2.9579    |
|        | 2 | 0.1259       | 0.7846      | 0.7946 | 0.3169        | 3.1558  |            | 0.7744   | 10.0927   |
|        | 3 | 0.0449       | 0.9785      | 0.9795 | 0.0918        | 10.8982 |            | 0.9775   | 20.7563   |
|        | 4 | 0.2019       |             | 0.2019 |               |         | 0.2019     |          |           |
| 8      | 1 | 0.1737       | 0.1956      | 0.2616 | 1.3280        | 0.7530  |            | 0.0899   | 0.0611    |
|        | 2 | 0.1473       | 0.5571      | 0.5762 | 0.5112        | 1.9560  |            | 0.5373   | 6.1210    |
|        | 3 | 0.0984       | 0.8337      | 0.8395 | 0.2344        | 4.2657  |            | 0.8279   | 12.6599   |
|        | 4 | 0.0346       | 0.9836      | 0.9842 | 0.0702        | 14.2391 |            | 0.9830   | 23.0750   |
| 9      | 1 | 0.1482       | 0.3427      | 0.3734 | 0.7938        | 1.2597  |            | 0.3090   | 2.7498    |
|        | 2 | 0.1208       | 0.6442      | 0.6554 | 0.3686        | 2.7129  |            | 0.6328   | 8.8187    |
|        | 3 | 0.0788       | 0.8679      | 0.8715 | 0.1809        | 5.5268  |            | 0.8643   | 14.8852   |
|        | 4 | 0.0274       | 0.9869      | 0.9873 | 0.0555        | 18.0226 |            | 0.9865   | 25.1197   |
|        | 5 | 0.1577       |             | 0.1577 |               |         | 0.1577     |          |           |
| 10     | 1 | 0.1403       | 0.1567      | 0.2103 | 1.3341        | 0.7496  |            | 0.0698   | 0.0530    |
|        | 2 | 0.1263       | 0.4548      | 0.4721 | 0.5363        | 1.8645  |            | 0.4368   | 5.7354    |
|        | 3 | 0.1005       | 0.7084      | 0.7155 | 0.2809        | 3.5597  |            | 0.7012   | 11.1147   |
|        | 4 | 0.0645       | 0.8926      | 0.8949 | 0.1441        | 6.9374  |            | 0.8903   | 16.8466   |
|        | 5 | 0.0222       | 0.9895      | 0.9897 | 0.0449        | 22.2916 |            | 0.9893   | 26.9650   |

〈表 4-8〉ベッセル設計表

| 次数 $n$ | 段 | 実数部 $\alpha$ | 虚数部 $\beta$ | $f_0$  | $\alpha(1/Q)$ | $Q$    | -3 dB 周波数 | ピーキング周波数 | ピーキング・レベル |
|--------|---|--------------|-------------|--------|---------------|--------|-----------|----------|-----------|
| 2      | 1 | 1.1050       | 0.6368      | 1.2754 | 1.7328        | 0.5771 | 1.0020    |          |           |
| 3      | 1 | 1.0509       | 1.0025      | 1.4524 | 1.4471        | 0.6910 | 1.4185    |          |           |
|        | 2 | 1.3270       |             | 1.3270 |               |        | 1.3270    |          |           |
| 4      | 1 | 1.3596       | 0.4071      | 1.4192 | 1.9160        | 0.5219 | 0.9705    |          |           |
|        | 2 | 0.9877       | 1.2476      | 1.5912 | 1.2414        | 0.8055 |           | 0.7622   | 0.2349    |
| 5      | 1 | 1.3851       | 0.7201      | 1.5611 | 1.7745        | 0.5635 | 1.1876    |          |           |
|        | 2 | 0.9606       | 1.4756      | 1.7607 | 1.0911        | 0.9165 |           | 1.1201   | 0.7768    |
|        | 3 | 1.5069       |             | 1.5069 |               |        | 1.5069    |          |           |
| 6      | 1 | 1.5735       | 0.3213      | 1.6060 | 1.9596        | 0.5103 | 1.0638    |          |           |
|        | 2 | 1.3836       | 0.9727      | 1.6913 | 1.6361        | 0.6112 | 1.4323    |          |           |
|        | 3 | 0.9318       | 1.6640      | 1.9071 | 0.9772        | 1.0234 |           | 1.3786   | 1.3851    |
| 7      | 1 | 1.6130       | 0.5896      | 1.7174 | 1.8784        | 0.5324 | 1.2074    |          |           |
|        | 2 | 1.3797       | 1.1923      | 1.8235 | 1.5132        | 0.6608 | 1.6964    |          |           |
|        | 3 | 0.9104       | 1.8375      | 2.0507 | 0.8879        | 1.1262 |           | 1.5961   | 1.9860    |
|        | 4 | 1.6853       |             | 1.6853 |               |        | 1.6853    |          |           |
| 8      | 1 | 1.7627       | 0.2737      | 1.7838 | 1.9763        | 0.5060 | 1.1675    |          |           |
|        | 2 | 0.8955       | 2.0044      | 2.1953 | 0.8158        | 1.2258 |           | 1.7932   | 2.5585    |
|        | 3 | 1.3780       | 1.3926      | 1.9591 | 1.4067        | 0.7109 |           | 0.2011   | 0.0005    |
|        | 4 | 1.6419       | 0.8256      | 1.8378 | 1.7868        | 0.5597 | 1.3849    |          |           |
| 9      | 1 | 1.8081       | 0.5126      | 1.8794 | 1.9242        | 0.5197 | 1.2774    |          |           |
|        | 2 | 1.6532       | 1.0319      | 1.9488 | 1.6966        | 0.5894 | 1.5747    |          |           |
|        | 3 | 1.3683       | 1.5685      | 2.0815 | 1.3148        | 0.7606 |           | 0.7668   | 0.0807    |
|        | 4 | 0.8788       | 2.1509      | 2.3235 | 0.7564        | 1.3220 |           | 1.9632   | 3.0949    |
|        | 5 | 1.8575       |             | 1.8575 |               |        | 1.8575    |          |           |
| 10     | 1 | 1.9335       | 0.2451      | 1.9490 | 1.9841        | 0.5040 |           |          |           |
|        | 2 | 1.8467       | 0.7335      | 1.9870 | 1.8587        | 0.5380 | 1.4177    |          |           |
|        | 3 | 1.6661       | 1.2246      | 2.0678 | 1.6115        | 0.6205 | 1.7848    |          |           |
|        | 4 | 1.3648       | 1.7395      | 2.2110 | 1.2346        | 0.8100 |           | 1.0785   | 0.2531    |
|        | 5 | 0.8686       | 2.2994      | 2.4580 | 0.7067        | 1.4150 |           | 2.1291   | 3.5944    |

〈表 4-9〉等リプル誤差をもつ線形位相フィルタ設計表 (リプル誤差  $0.05^\circ$ )

| 次数 $n$ | 段 | 実数部 $\alpha$ | 虚数部 $\beta$ | $f_0$  | $\alpha(1/Q)$ | $Q$    | -3 dB 周波数 | ピーキング周波数 | ピーキング・レベル |
|--------|---|--------------|-------------|--------|---------------|--------|-----------|----------|-----------|
| 2      | 1 | 1.0087       | 0.6680      | 1.2098 | 1.6675        | 0.5997 | 0.9999    |          |           |
| 3      | 1 | 0.8541       | 1.0725      | 1.3710 | 1.2459        | 0.8026 |           | 0.6487   | 0.2232    |
|        | 2 | 1.0459       |             | 1.0459 |               |        | 1.0459    |          |           |
| 4      | 1 | 0.9648       | 0.4748      | 1.0753 | 1.7945        | 0.5573 | 0.8056    |          |           |
|        | 2 | 0.7448       | 1.4008      | 1.5865 | 0.9389        | 1.0650 |           | 1.1864   | 1.6286    |
| 5      | 1 | 0.8915       | 0.8733      | 1.2480 | 1.4287        | 0.6999 | 1.2351    |          |           |
|        | 2 | 0.6731       | 1.7085      | 1.8363 | 0.7331        | 1.3641 |           | 1.5703   | 3.3234    |
|        | 3 | 0.9430       |             | 0.9430 |               |        | 0.9430    |          |           |
| 6      | 1 | 0.8904       | 0.4111      | 0.9807 | 1.8158        | 0.5507 | 0.7229    |          |           |
|        | 2 | 0.8233       | 1.2179      | 1.4701 | 1.1201        | 0.8928 |           | 0.8975   | 0.6495    |
|        | 3 | 0.6152       | 1.9810      | 2.0743 | 0.5932        | 1.6859 |           | 1.8831   | 4.9365    |
| 7      | 1 | 0.8425       | 0.7791      | 1.1475 | 1.4684        | 0.6810 | 1.1036    |          |           |
|        | 2 | 0.7708       | 1.5351      | 1.7177 | 0.8975        | 1.1143 |           | 1.3276   | 1.9162    |
|        | 3 | 0.5727       | 2.2456      | 2.3175 | 0.4942        | 2.0233 |           | 2.1713   | 6.3948    |
|        | 4 | 0.8615       |             | 0.8615 |               |        | 0.8615    |          |           |
| 8      | 1 | 0.8195       | 0.3711      | 0.8996 | 1.8219        | 0.5489 | 0.6600    |          |           |
|        | 2 | 0.7930       | 1.1054      | 1.3604 | 1.1658        | 0.8578 |           | 0.7701   | 0.4705    |
|        | 3 | 0.7213       | 1.8134      | 1.9516 | 0.7392        | 1.3528 |           | 1.6638   | 3.2627    |
|        | 4 | 0.5341       | 2.4761      | 2.5330 | 0.4217        | 2.3713 |           | 2.4178   | 7.6973    |
| 9      | 1 | 0.7853       | 0.7125      | 1.0604 | 1.4812        | 0.6751 | 1.0102    |          |           |
|        | 2 | 0.7555       | 1.4127      | 1.6020 | 0.9432        | 1.0602 |           | 1.1937   | 1.6005    |
|        | 3 | 0.6849       | 2.0854      | 2.1950 | 0.6241        | 1.6024 |           | 1.9697   | 4.5404    |
|        | 4 | 0.5060       | 2.7133      | 2.7601 | 0.3667        | 2.7274 |           | 2.6657   | 8.8633    |
|        | 5 | 0.7983       |             | 0.7983 |               |        | 0.7983    |          |           |
| 10     | 1 | 0.7592       | 0.3413      | 0.8324 | 1.8241        | 0.5482 | 0.6096    |          |           |
|        | 2 | 0.7467       | 1.0195      | 1.2637 | 1.1818        | 0.8462 |           | 0.6941   | 0.4145    |
|        | 3 | 0.7159       | 1.6836      | 1.8295 | 0.7826        | 1.2778 |           | 1.5238   | 2.8507    |
|        | 4 | 0.6475       | 2.3198      | 2.4085 | 0.5377        | 1.8598 |           | 2.2276   | 5.7152    |
|        | 5 | 0.4777       | 2.9128      | 2.9517 | 0.3237        | 3.0895 |           | 2.8734   | 9.9130    |

〈表 4-10〉等リプル誤差をもつ線形位相フィルタ設計表 (リプル誤差  $0.5^\circ$ )

| 次数 $n$ | 段 | 実数部 $\alpha$ | 虚数部 $\beta$ | $f_0$  | $\alpha(1/Q)$ | $Q$    | -3 dB 周波数 | ピーキング周波数 | ピーキング・レベル |
|--------|---|--------------|-------------|--------|---------------|--------|-----------|----------|-----------|
| 2      | 1 | 0.8590       | 0.6981      | 1.1069 | 1.5521        | 0.6443 | 1.0000    |          |           |
| 3      | 1 | 0.6969       | 1.1318      | 1.3292 | 1.0486        | 0.9536 |           | 0.8918   | 0.9836    |
|        | 2 | 0.8257       |             | 0.8257 |               |        | 0.8257    |          |           |
| 4      | 1 | 0.7448       | 0.5133      | 0.9045 | 1.6468        | 0.6072 | 0.7597    |          |           |
|        | 2 | 0.6037       | 1.4983      | 1.6154 | 0.7475        | 1.3379 |           | 1.3713   | 3.1817    |
| 5      | 1 | 0.6775       | 0.9401      | 1.1588 | 1.1693        | 0.8552 |           | 0.6518   | 0.4579    |
|        | 2 | 0.5412       | 1.8256      | 1.9041 | 0.5684        | 1.7592 |           | 1.7435   | 5.2720    |
|        | 3 | 0.7056       |             | 0.7056 |               |        | 0.7056    |          |           |
| 6      | 1 | 0.6519       | 0.4374      | 0.7850 | 1.6608        | 0.6021 | 0.6522    |          |           |
|        | 2 | 0.6167       | 1.2963      | 1.4355 | 0.8592        | 1.1639 |           | 1.1402   | 2.2042    |
|        | 3 | 0.4893       | 2.0982      | 2.1545 | 0.4542        | 2.2016 |           | 2.0404   | 7.0848    |
| 7      | 1 | 0.6190       | 0.8338      | 1.0385 | 1.1922        | 0.8388 |           | 0.5586   | 0.3798    |
|        | 2 | 0.5816       | 1.6455      | 1.7453 | 0.6665        | 1.5004 |           | 1.5393   | 4.0353    |
|        | 3 | 0.4598       | 2.3994      | 2.4431 | 0.3764        | 2.6567 |           | 2.3549   | 8.6433    |
|        | 4 | 0.6283       |             | 0.6283 |               |        | 0.6283    |          |           |
| 8      | 1 | 0.5791       | 0.3857      | 0.6958 | 1.6646        | 0.6007 | 0.5764    |          |           |
|        | 2 | 0.5665       | 1.1505      | 1.2824 | 0.8835        | 1.1319 |           | 1.0014   | 2.0187    |
|        | 3 | 0.5303       | 1.8914      | 1.9643 | 0.5399        | 1.8521 |           | 1.8155   | 5.6819    |
|        | 4 | 0.4148       | 2.5780      | 2.6112 | 0.3177        | 3.1475 |           | 2.5444   | 10.0703   |
| 9      | 1 | 0.5688       | 0.7595      | 0.9489 | 1.1989        | 0.8341 |           | 0.5033   | 0.3581    |
|        | 2 | 0.5545       | 1.5089      | 1.6076 | 0.6899        | 1.4496 |           | 1.4033   | 3.7748    |
|        | 3 | 0.5179       | 2.2329      | 2.2922 | 0.4519        | 2.2130 |           | 2.1720   | 7.1270    |
|        | 4 | 0.4080       | 2.9028      | 2.9313 | 0.2784        | 3.5923 |           | 2.8740   | 11.1925   |
|        | 5 | 0.5728       |             | 0.5728 |               |        | 0.5728    |          |           |
| 10     | 1 | 0.5249       | 0.3487      | 0.6302 | 1.6659        | 0.6003 | 0.5215    |          |           |
|        | 2 | 0.5193       | 1.0429      | 1.1650 | 0.8915        | 1.1217 |           | 0.9044   | 1.9598    |
|        | 3 | 0.5051       | 1.7264      | 1.7988 | 0.5616        | 1.7806 |           | 1.6509   | 5.3681    |
|        | 4 | 0.4711       | 2.3850      | 2.4311 | 0.3876        | 2.5802 |           | 2.3380   | 8.3994    |
|        | 5 | 0.3708       | 2.9940      | 3.0169 | 0.2458        | 4.0681 |           | 2.9709   | 12.2539   |

〈表 4-11〉ガウス特性から 12 dB 減衰特性をもつトランジショナル・フィルタ設計表

| 次数 $n$ | 段 | 実数部 $\alpha$ | 虚数部 $\beta$ | $f_0$  | $\alpha(1/Q)$ | $Q$    | -3 dB 周波数 | ピーキング周波数 | ピーキング・レベル |
|--------|---|--------------|-------------|--------|---------------|--------|-----------|----------|-----------|
| 3      | 1 | 0.9360       | 1.2168      | 1.5352 | 1.2194        | 0.8201 |           | 0.7775   | 0.2956    |
|        | 2 | 0.9360       |             | 0.9360 |               |        | 0.9360    |          |           |
| 4      | 1 | 0.9278       | 1.6995      | 1.9363 | 0.9583        | 1.0435 |           | 1.4239   | 1.5025    |
|        | 2 | 0.9192       | 0.5560      | 1.0743 | 1.7113        | 0.5844 | 0.8582    |          |           |
| 5      | 1 | 0.8075       | 0.9973      | 1.2832 | 1.2585        | 0.7946 |           | 0.5853   | 0.1921    |
|        | 2 | 0.7153       | 0.2053      | 0.7442 | 1.9224        | 0.5202 | 0.5065    |          |           |
|        | 3 | 0.8131       |             | 0.8131 |               |        | 0.8131    |          |           |
| 6      | 1 | 0.7019       | 0.4322      | 0.8243 | 1.7030        | 0.5872 |           |          |           |
|        | 2 | 0.6667       | 1.2931      | 1.4549 | 0.9165        | 1.0911 | 0.6627    |          |           |
|        | 3 | 0.4479       | 2.1363      | 2.1827 | 0.4104        | 2.4366 |           | 1.1080   |           |
| 7      | 1 | 0.6155       | 0.7703      | 0.9860 | 1.2485        | 0.8010 |           | 0.4632   | 0.2168    |
|        | 2 | 0.5486       | 1.5154      | 1.6116 | 0.6808        | 1.4689 |           | 1.4126   |           |
|        | 3 | 0.2905       | 2.1486      | 2.1681 | 0.2680        | 3.7318 |           | 2.1289   |           |
|        | 4 | 0.6291       |             | 0.6291 |               |        | 0.6291    |          |           |
| 8      | 1 | 0.5441       | 0.3358      | 0.6394 | 1.7020        | 0.5876 | 0.5145    |          |           |
|        | 2 | 0.5175       | 0.9962      | 1.1226 | 0.9220        | 1.0846 |           | 0.8512   |           |
|        | 3 | 0.4328       | 1.6100      | 1.6672 | 0.5192        | 1.9260 |           | 1.5507   |           |
|        | 4 | 0.1978       | 2.0703      | 2.0797 | 0.1902        | 5.2571 |           | 2.0608   |           |
| 9      | 1 | 0.4961       | 0.6192      | 0.7934 | 1.2505        | 0.7997 |           | 0.3705   | 0.2116    |
|        | 2 | 0.4568       | 1.2145      | 1.2976 | 0.7041        | 1.4203 |           | 1.1253   |           |
|        | 3 | 0.3592       | 1.7429      | 1.7795 | 0.4037        | 2.4771 |           | 1.7055   |           |
|        | 4 | 0.1489       | 2.1003      | 2.1056 | 0.1414        | 7.0704 |           | 2.0950   |           |
|        | 5 | 0.5065       |             | 0.5065 |               |        | 0.5065    |          |           |
| 10     | 1 | 0.4535       | 0.2794      | 0.5327 | 1.7028        | 0.5873 | 0.4283    |          |           |
|        | 2 | 0.4352       | 0.8289      | 0.9362 | 0.9297        | 1.0756 |           | 0.7055   |           |
|        | 3 | 0.3886       | 1.3448      | 1.3998 | 0.5552        | 1.8011 |           | 1.2874   |           |
|        | 4 | 0.2908       | 1.7837      | 1.8072 | 0.3218        | 3.1074 |           | 1.7598   |           |
|        | 5 | 0.1136       | 2.0599      | 2.0630 | 0.1101        | 9.0802 |           | 2.0568   |           |

〈表 4-12〉ガウス特性から 6 dB 減衰特性をもつトランジショナル・フィルタ設計表

| 次数 $n$ | 段 | 実数部 $\alpha$ | 虚数部 $\beta$ | $f_0$  | $\alpha(1/Q)$ | $Q$     | - 3 dB 周波数 | ピーキング周波数 | ピーキング・レベル |
|--------|---|--------------|-------------|--------|---------------|---------|------------|----------|-----------|
| 3      | 1 | 0.9622       | 1.2214      | 1.5549 | 1.2377        | 0.8080  |            | 0.7523   | 0.2448    |
|        | 2 | 0.9776       | 0.5029      | 1.0994 | 1.7785        | 0.5623  | 0.8338     |          |           |
| 4      | 1 | 0.7940       | 0.5029      | 0.9399 | 1.6896        | 0.5919  |            |          | 3.0859    |
|        | 2 | 0.6304       | 1.5407      | 1.6647 | 0.7574        | 1.3203  | 0.7636     | 1.4058   |           |
| 5      | 1 | 0.6190       | 0.8254      | 1.0317 | 1.1999        | 0.8334  |            | 0.5460   | 0.3548    |
|        | 2 | 0.3559       | 1.5688      | 1.6087 | 0.4425        | 2.2600  |            | 1.5279   | 7.3001    |
|        | 3 | 0.6650       |             | 0.6650 |               |         | 0.6650     |          |           |
| 6      | 1 | 0.5433       | 0.3431      | 0.6426 | 1.6910        | 0.5914  |            |          |           |
|        | 2 | 0.4672       | 0.9991      | 1.1029 | 0.8472        | 1.1804  | 0.5215     |          |           |
|        | 3 | 0.2204       | 1.5067      | 1.5227 | 0.2895        | 3.4545  |            | 0.8831   | 2.2992    |
| 7      | 1 | 0.4580       | 0.5932      | 0.7494 | 1.2223        | 0.8182  |            | 0.3770   | 0.2874    |
|        | 2 | 0.3649       | 1.1286      | 1.1861 | 0.6153        | 1.6253  |            | 1.0680   | 4.6503    |
|        | 3 | 0.1522       | 1.4938      | 1.5015 | 0.2027        | 4.9328  |            | 1.4860   | 13.9067   |
|        | 4 | 0.4828       |             | 0.4828 |               |         | 0.4828     |          |           |
| 8      | 1 | 0.4222       | 0.2640      | 0.4979 | 1.6958        | 0.5897  |            |          |           |
|        | 2 | 0.3833       | 0.7716      | 0.8616 | 0.8898        | 1.1239  | 0.4026     | 0.6697   |           |
|        | 3 | 0.2678       | 1.2066      | 1.2360 | 0.4333        | 2.3076  |            | 1.1765   |           |
|        | 4 | 0.1122       | 1.4798      | 1.4840 | 0.1512        | 6.6134  |            | 1.4755   |           |
| 9      | 1 | 0.3700       | 0.4704      | 0.5985 | 1.2365        | 0.8088  |            | 0.2905   | 0.2480    |
|        | 2 | 0.3230       | 0.9068      | 0.9626 | 0.6711        | 1.4901  |            | 0.8473   | 3.9831    |
|        | 3 | 0.2309       | 1.2634      | 1.2843 | 0.3596        | 2.7811  |            | 1.2421   | 9.0271    |
|        | 4 | 0.0860       | 1.4740      | 1.4765 | 0.1165        | 8.5804  |            | 1.4715   | 18.6849   |
|        | 5 | 0.3842       |             | 0.3842 |               |         | 0.3842     |          |           |
| 10     | 1 | 0.3384       | 0.2101      | 0.3983 | 1.6991        | 0.5885  |            |          |           |
|        | 2 | 0.3164       | 0.6180      | 0.6943 | 0.9114        | 1.0972  | 0.3212     | 0.5309   |           |
|        | 3 | 0.2677       | 0.9852      | 1.0209 | 0.5244        | 1.9068  |            | 0.9481   |           |
|        | 4 | 0.1849       | 1.2745      | 1.2878 | 0.2871        | 3.4825  |            | 1.2610   |           |
|        | 5 | 0.0671       | 1.4389      | 1.4405 | 0.0931        | 10.7401 |            | 1.4373   |           |