ANALOG DEVICES

想像を超える可能性を

AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

Mixed Signalシステムの深み「DA変換と信号処理理論の関係」に踏み込んでみる

アナログ・デバイセズ株式会社

石井 聡

9/13/2016 – 9/16/2016

アジェンダ（ゴールは「時間軸波形と周波数スペクトルはどうつながっているか」と「**sinc関数、畳み込み**」の理解）

1. イントロダクション「信号処理理論を理解して最適設計」
2. デジタル信号とデジタル信号処理理論の基礎
3. 離散信号とDACアナログ出力スペクトルとをつなぐ**sinc関数**
4. 折り返しと高次ナイキストゾーンと信号位相関係はどう考える
5. 信号処理理論とDACスペクトルの考え方（乗算と**畳み込み**; Convolution）
6. まとめ・参考文献・Appendix

   A-1. 超高速DAC技術「MIX MODE」の信号をデモ・システムで作ってみる

   A-2. ノーマルモードとMIX MODEの違いを乗算と畳み込みで考える

   A-3. AD変換された離散信号スペクトルも畳み込みの考え方が用いられている

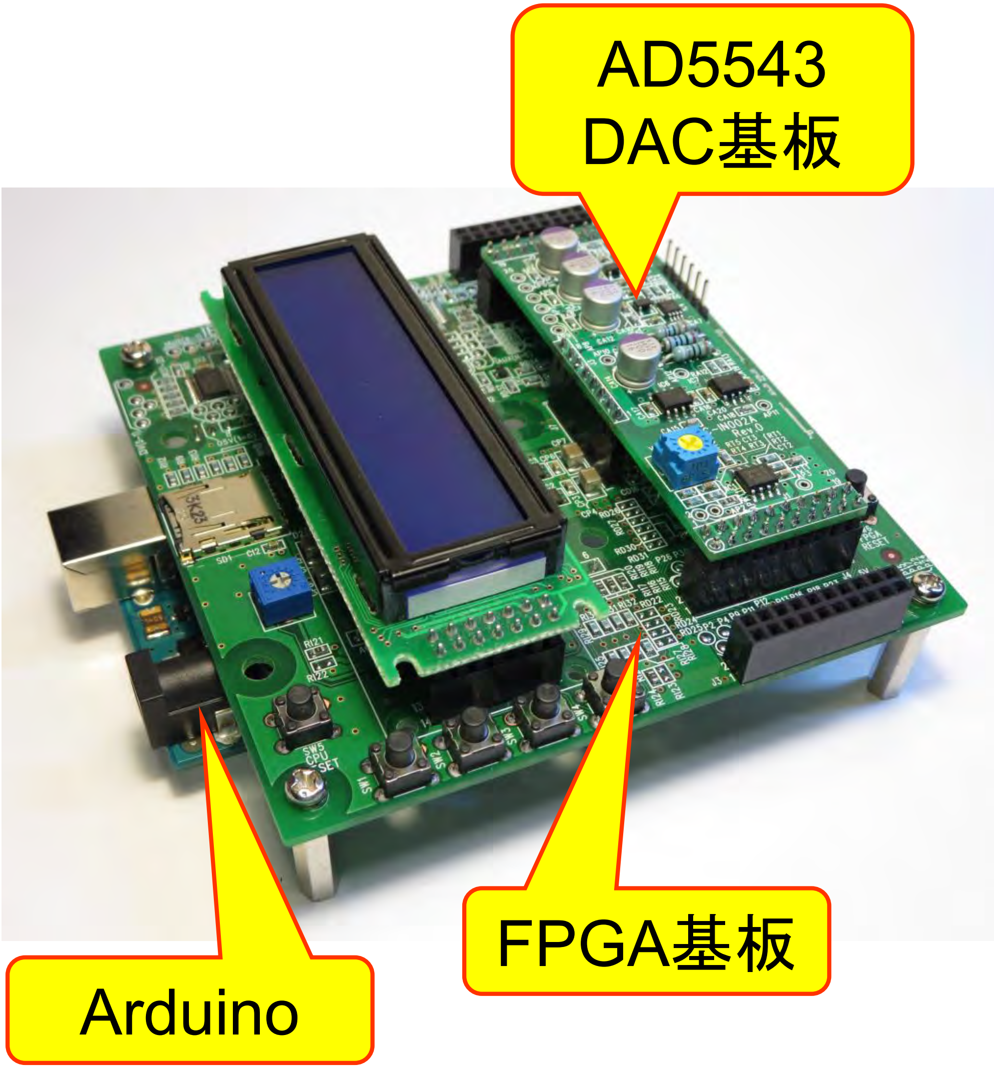
1. イントロダクション 「信号処理理論を理解して最適設計」

「知らなくても大丈夫」と思っている？ 信号処理理論を理解するメリット

- 最適なMixed Signalシステムの設計には、理論の理解は必須
- 信号処理は偉大な数学者の理論から成り立っている
- 回路や信号処理は理論どおりに動いている
- **sinc関数と畳み込みを知ることで**
- シグマデルタADCや、AD変換・DA変換、デジタルフィルタ、アナログフィルタ、有線・無線通信、窓関数処理などの動作を理解できる
- 信号処理理論を知ることで、回路や信号の動作を正しく理解・コントロールできる
- **時間軸と周波数軸との関係**が非常にクリアになり、回路をより深く見通せる

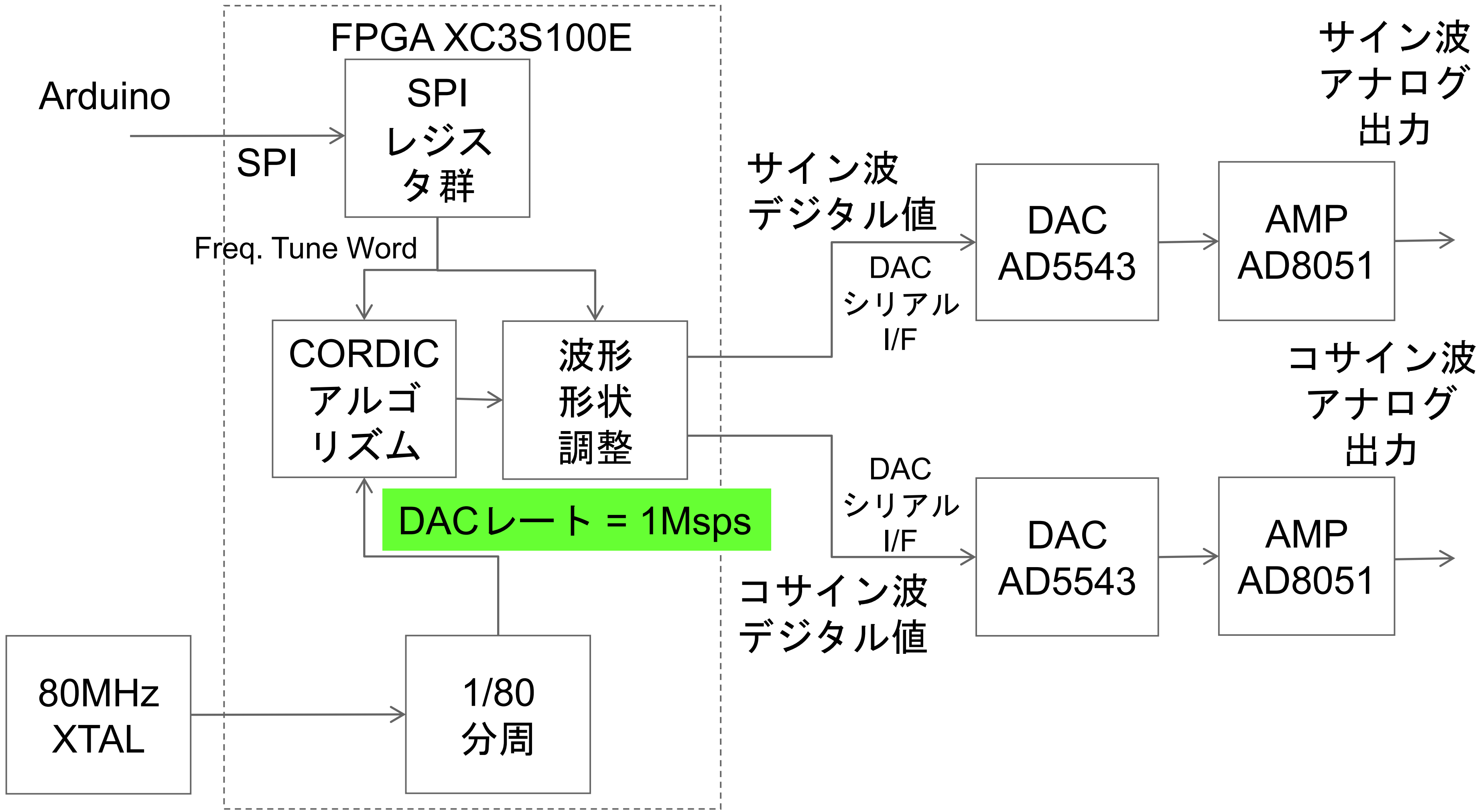
ANALOG DEVICES 想像を超える可能性を AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

実動作デモで使用する基板（AD5543 DAC基板とFPGA基板）



このデモ基板をP板.com展示ブース
で展示しています
また関連する冊子「**Arduinoと接続できるFPGA基板の設計とCORDICアルゴリズムの実装**」も配布中です
※ 冊子はご名刺と交換となります

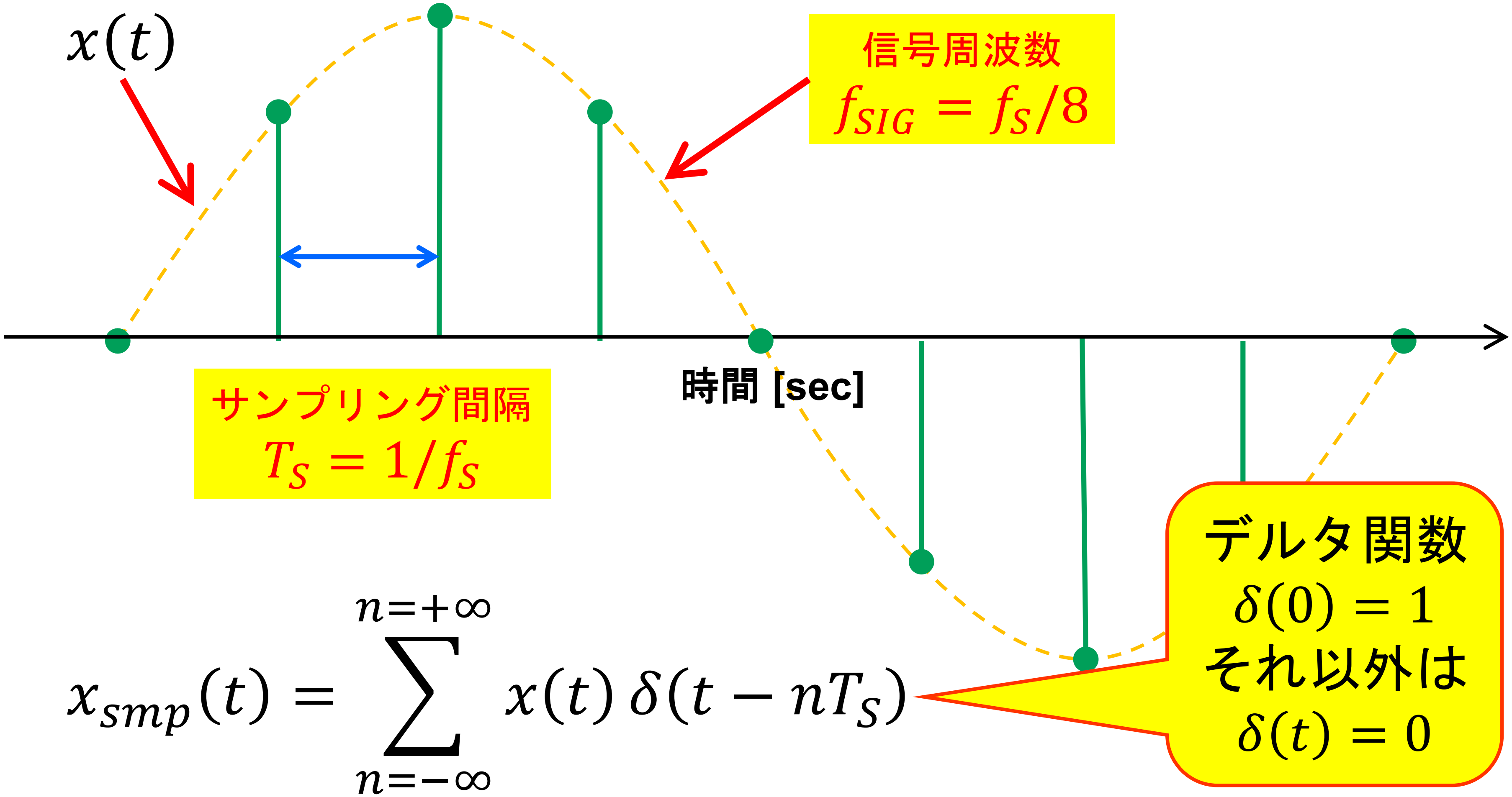
実動作デモするシステムのブロック図（DACレート 1Msps）



ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

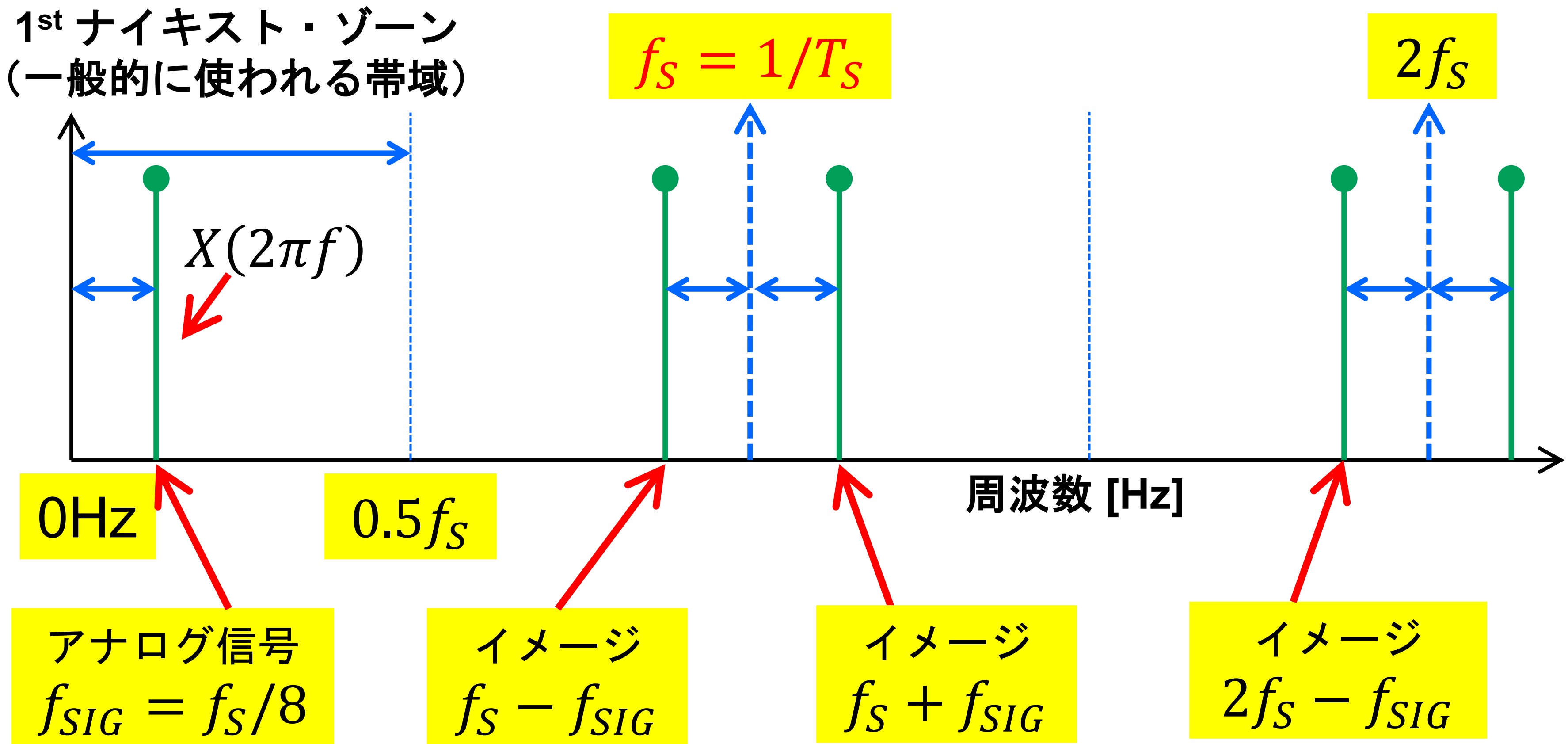
2. デジタル信号とデジタル信号処理理論の基礎

時間軸での離散信号波形（デジタル信号波形・インパルス状波形）【以降「離散信号」と呼ぶ】



$$x_{smp}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(t)\,\delta(t - nT_S)$$

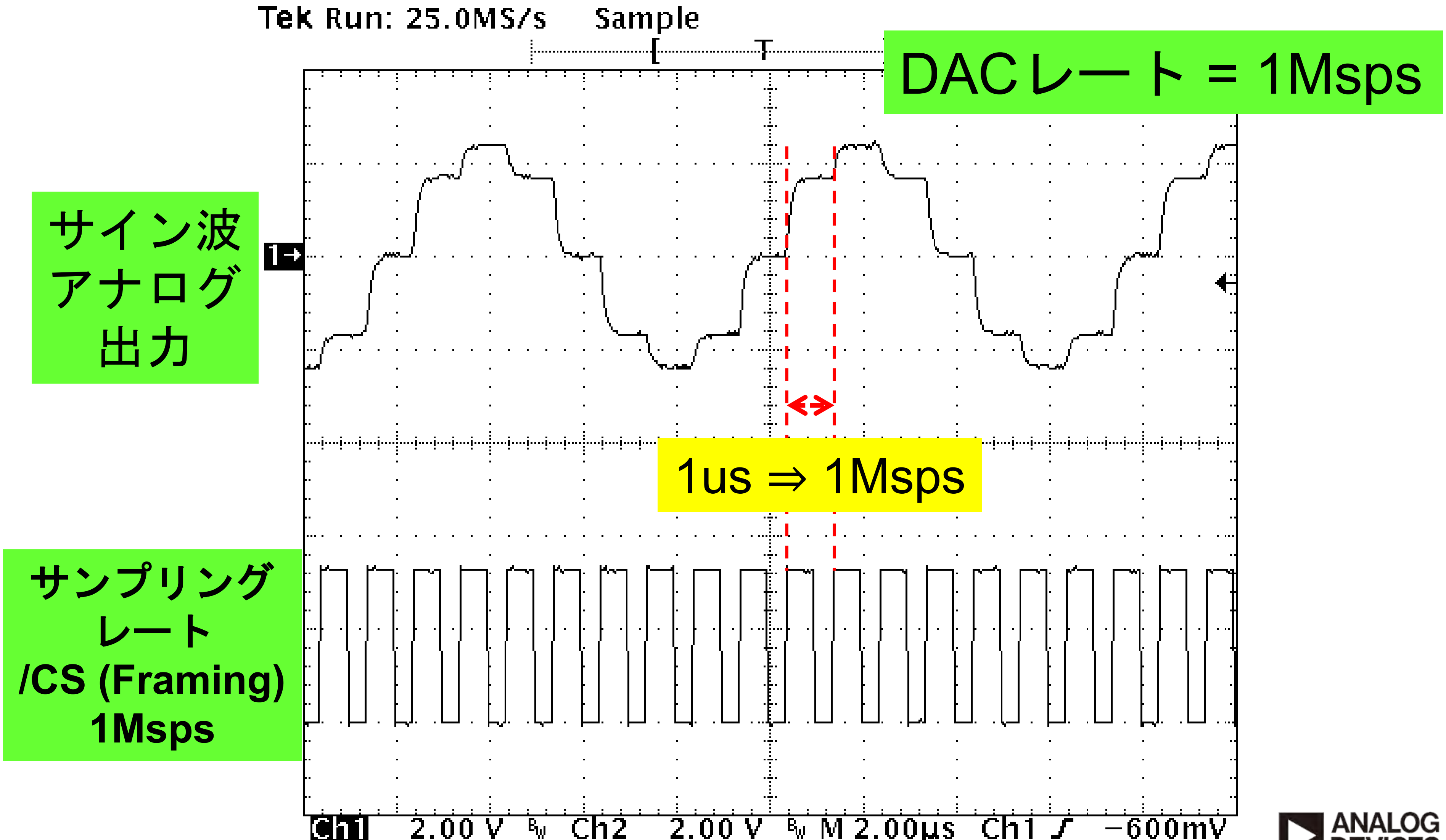
周波数軸での離散信号のスペクトル



$$X_{smp}(2\pi f) = \frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X[2\pi(f - nf_S)]$$

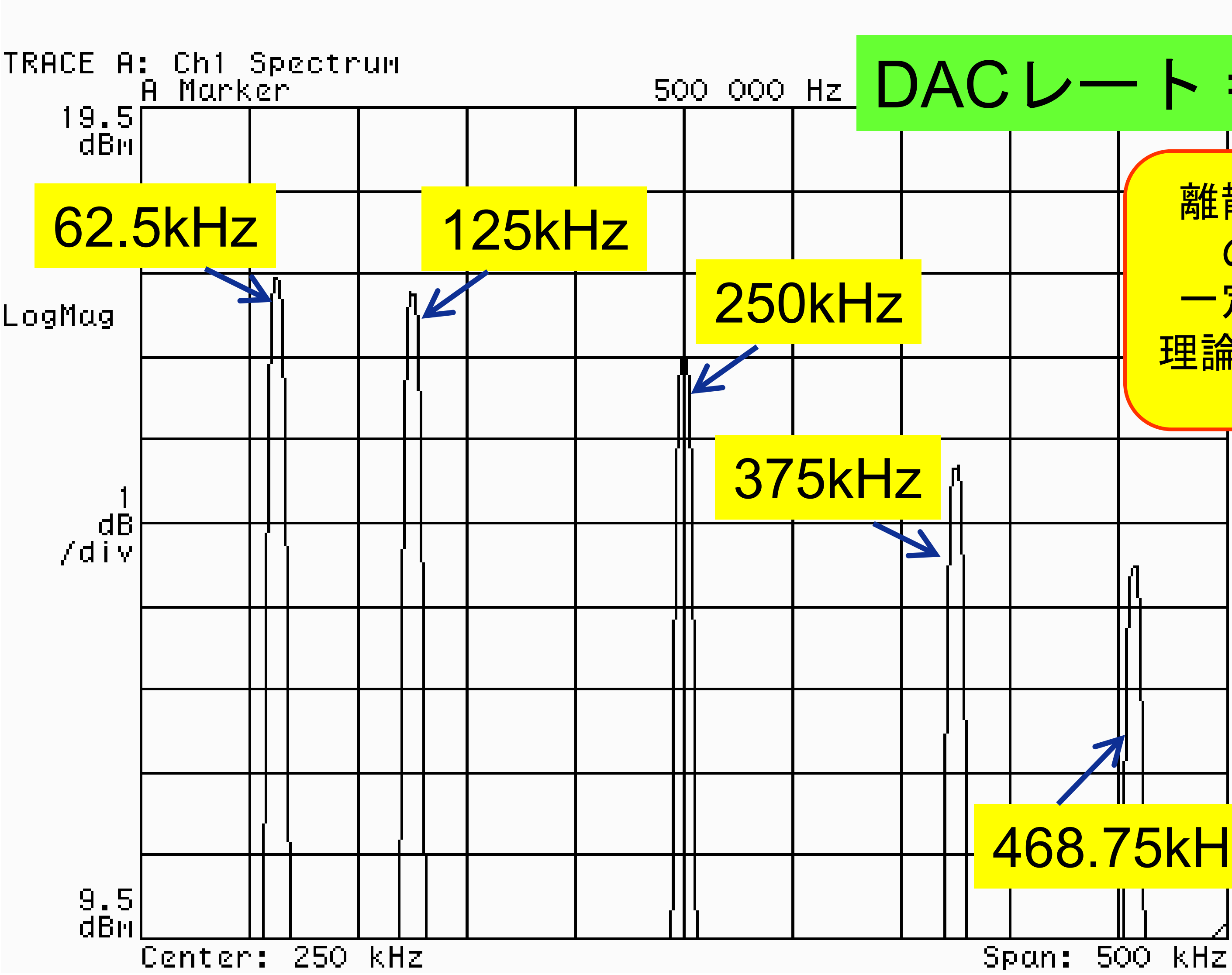
3. 離散信号とDACアナログ出力スペクトルとをつなぐsinc関数

DAC AD5543で正弦波アナログ信号を作ってみる（時間軸波形の観測）※以降この波形を「ノーマルモード」と呼ぶ



ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

DAC AD5543で作った正弦波アナログ信号の周波数軸でのスペクトルを観測してみる



これからの説明を理解するメリット

- **sincを知ることで**
- シグマデルタADCや、AD変換・DA変換、有線・無線通信などの動作を理解できる
- DACアナログ信号の周波数特性が理解できる
- **時間軸と周波数軸との関係**がクリアになり、多岐の回路を深く見通せる

シグマデルタADC
AD7124-4
Sinc^{3}フィルタ応答

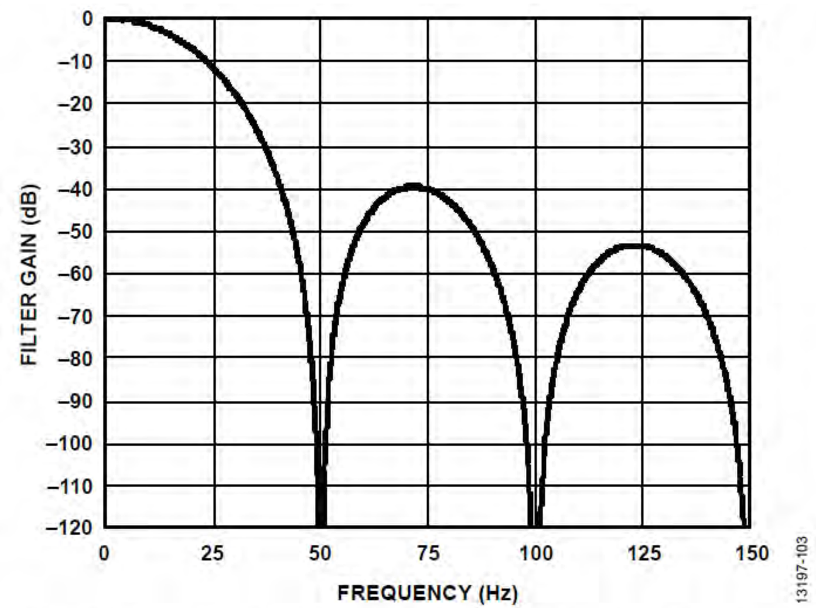
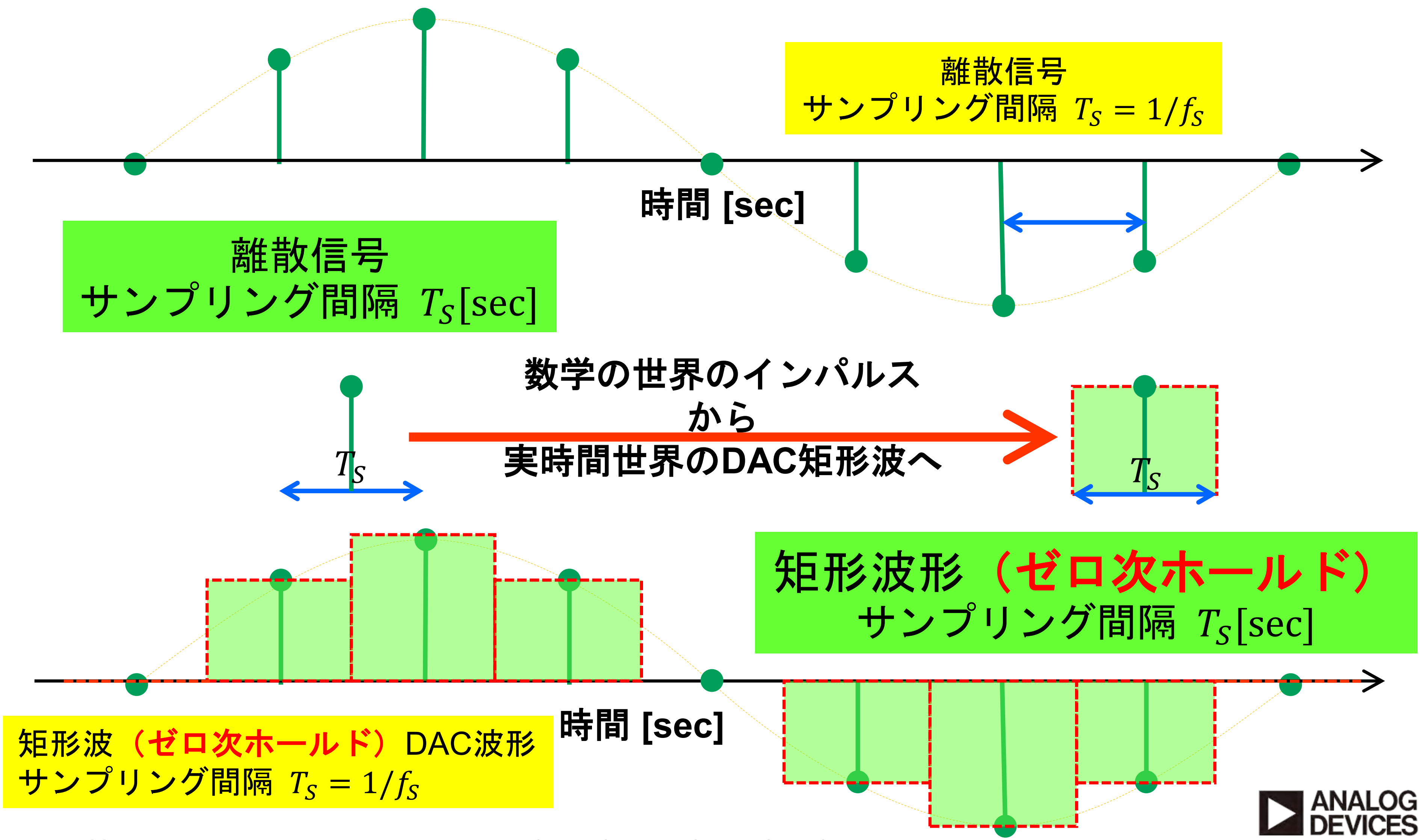


Figure 94. Sinc^3 Filter Response (50 SPS Output Data Rate, Zero Latency Disabled or 16.67 SPS Output Data Rate, Zero Latency Enabled)

ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

離散信号と実時間を結ぶカギ ①「離散信号から矩形波形へ変換（ゼロ次ホールド）」



離散信号と実時間を結ぶカギ②「フーリエ変換」

フーリエ変換したいターゲットの時間波形（たとえば電圧量V）

複素信号（電圧ならピーク1Vの交流信号として考える）

フーリエ変換の結果（周波数軸）

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

複素信号

$$(\omega = 2\pi f)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

コサイン成分

90度遅れたサイン成分

角周波数[rad/sec]

周波数[Hz]

フーリエ変換は「時間軸を周波数軸に変換」

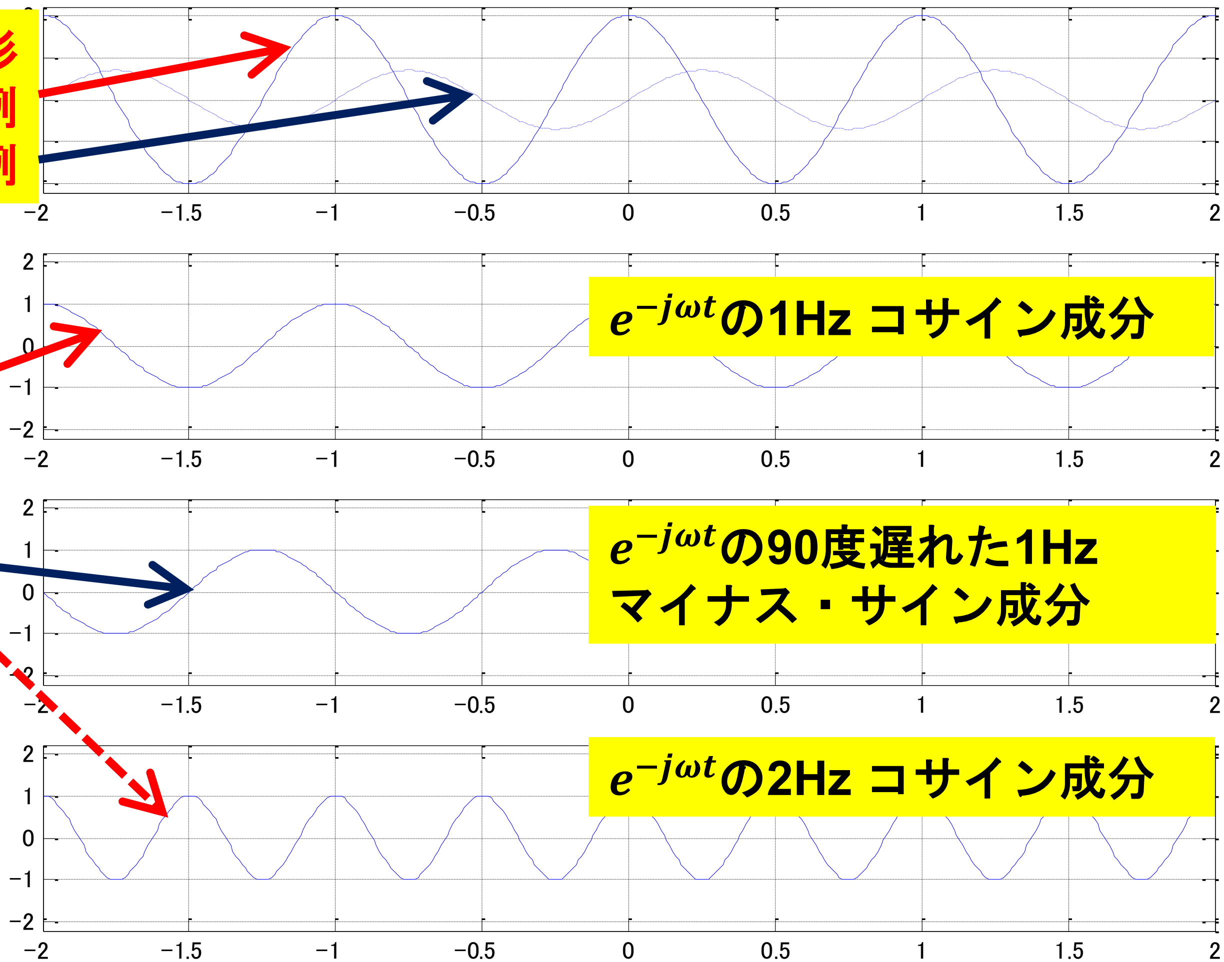
時間波形$f(t)$と複素信号$e^{-j\omega t}$との
各「角周波数ω」における周波数軸上での「相性」

【参考】フーリエ変換とは各「角周波数ω」における「時間軸上での相性」（フーリエ変換の考え方のイメージ）

フーリエ変換する1Hz波形
実線はコサインの例
点線はサインの例

$$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

$(\omega = 2\pi f)$



$e^{-j\omega t}$の1Hz コサイン成分

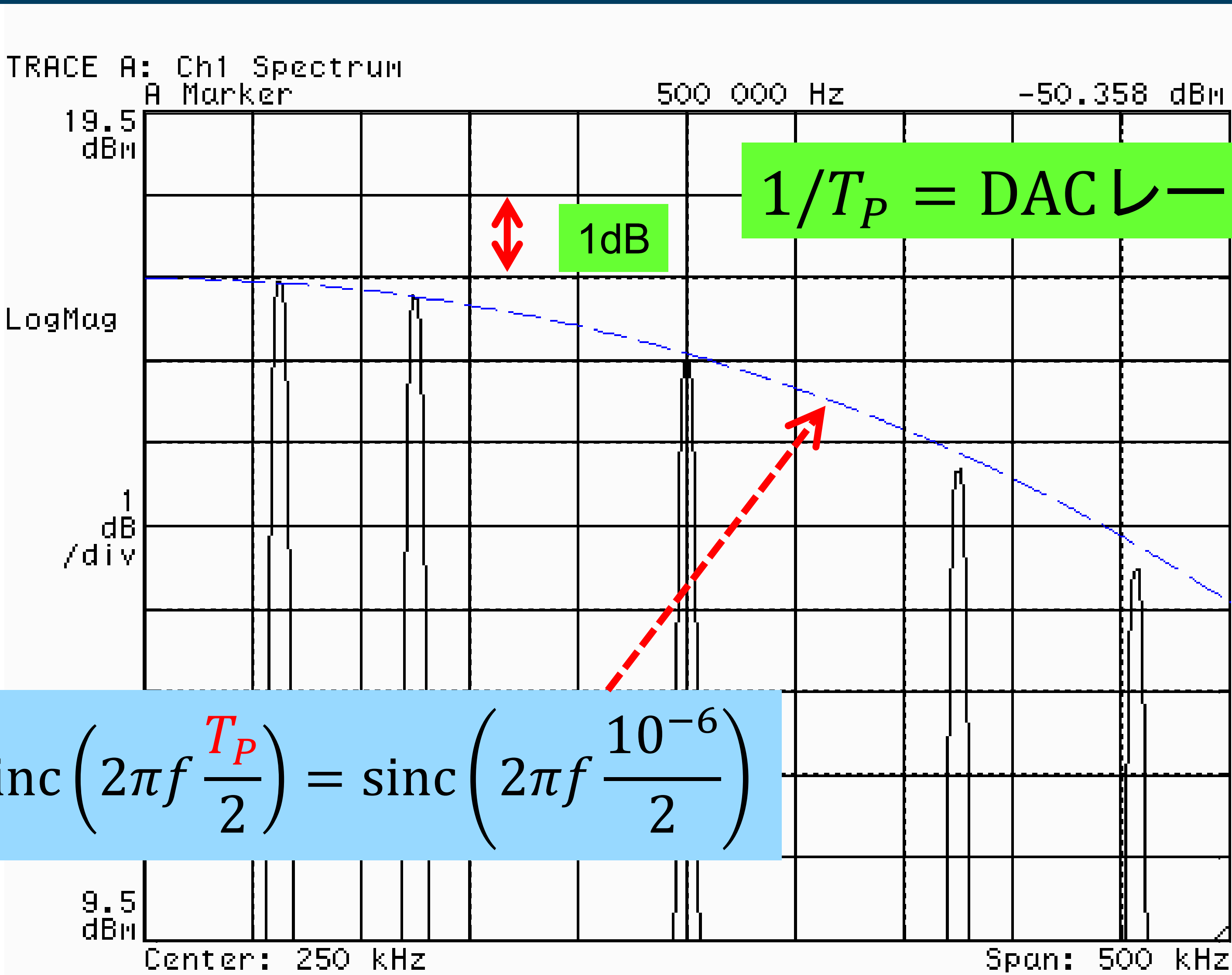
$e^{-j\omega t}$の90度遅れた1Hz
マイナス・サイン成分

$e^{-j\omega t}$の2Hz コサイン成分

これはイメージであり、フーリエ変換は無限時間の連続波は積分が収束しない。そのため繰り返し波はフーリエ級数を用いる

フーリエ変換は時間波形$f(t)$と複素信号$e^{-j\omega t}$との各「角周波数ω」における**周波数軸上**での「相性」

離散信号と実時間を結ぶカギ③「ゼロ次ホールドのスペクトル（フーリエ変換）」はsinc関数



$1/T_P$ = DACレート = 1Msps

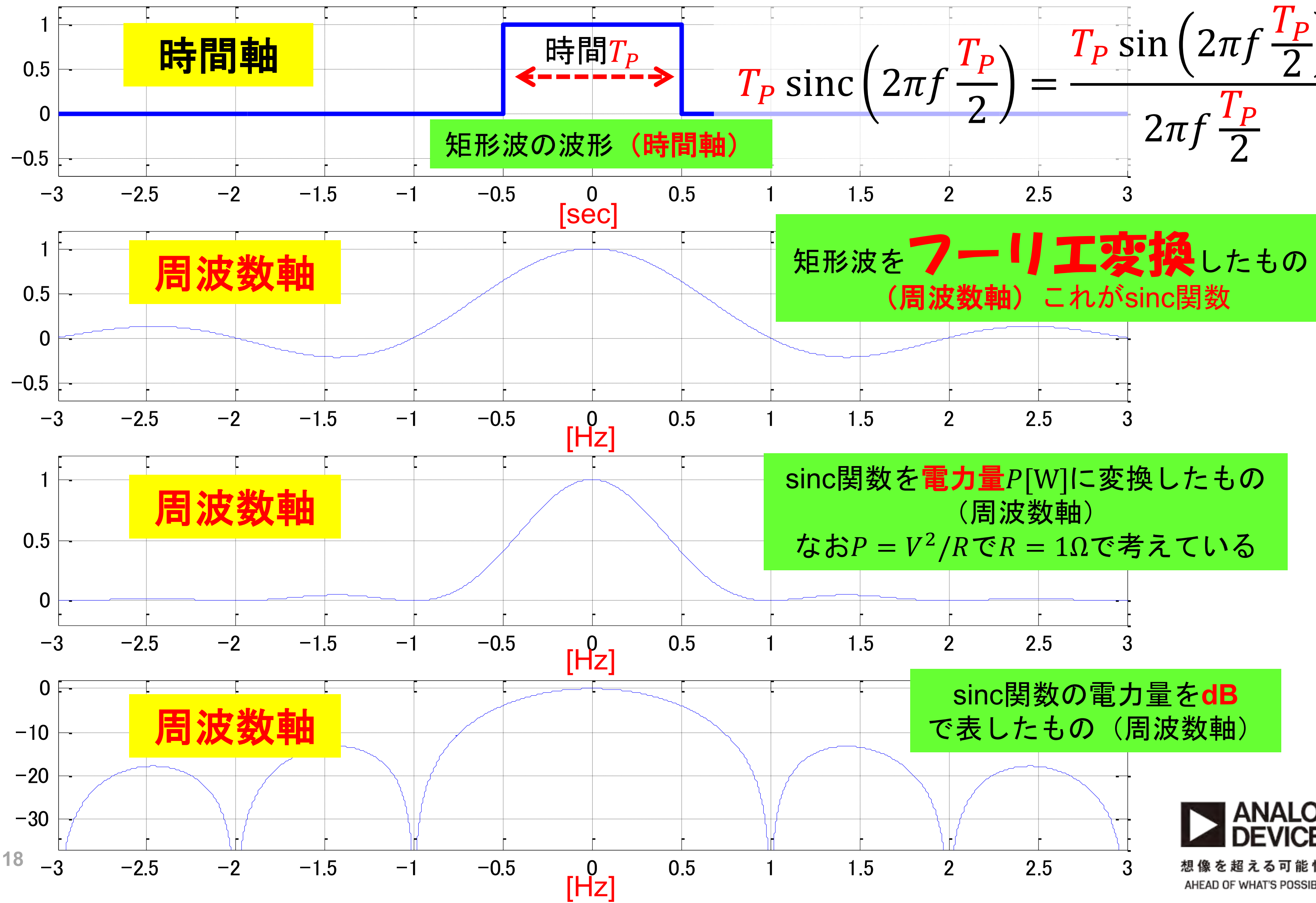
$$\mathrm{sinc}\left(2\pi f \frac{T_P}{2}\right) = \mathrm{sinc}\left(2\pi f \frac{10^{-6}}{2}\right)$$

ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

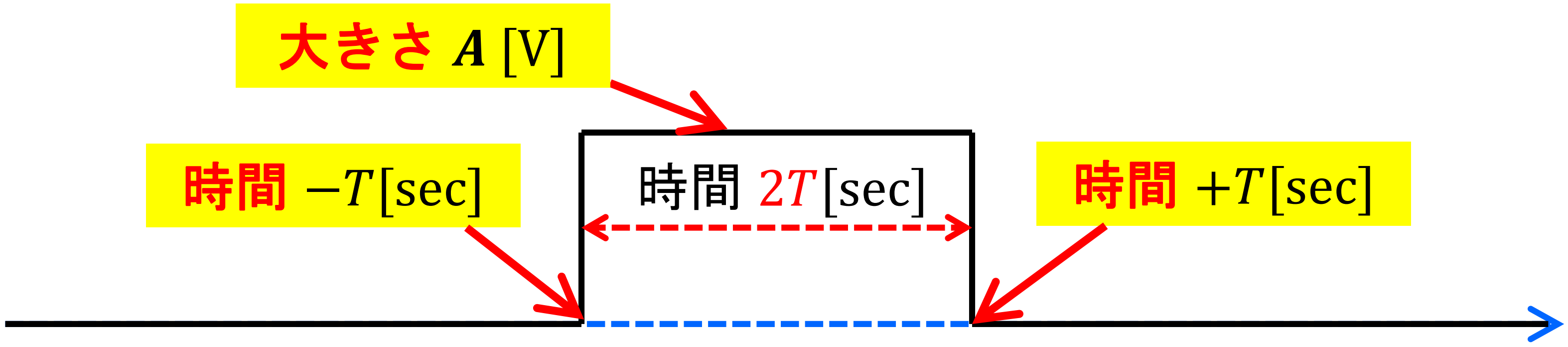
離散信号と実時間を結ぶカギ ④「矩形波形とsinc関数」

矩形波形をフーリエ変換するとsinc関数になる

$$T_P\ \mathrm{sinc}\left(2\pi f\,\frac{T_P}{2}\right) = \frac{T_P \sin\left(2\pi f\,\frac{T_P}{2}\right)}{2\pi f\,\frac{T_P}{2}}$$



【参考】矩形波がフーリエ変換により周波数軸で「sinc関数」になるようす　　　・・・まずはパルス幅$2T$[sec] で考える



矩形波の波形$f(t)$ 時間軸 [sec]

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt=\boxed{\int_{-T}^{+T} A}\cdot e^{-j\omega t}\,dt$$

時間 $-T$ [sec]〜 $+T$[sec]の間だけ大きさAがある状態（$f(t)$）を示している

$$F(\omega)=\int_{-T}^{+T} A\cdot e^{-j\omega t}\,dt=A\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T}^{+T}=\frac{\boxed{e^{-j\omega T}-e^{+j\omega T}}}{-j\omega}$$

1項と2項をイレカエ

$$=\frac{2}{\omega}\cdot\boxed{\frac{-\left(e^{+j\omega T}-e^{-j\omega T}\right)}{-j2}}=\frac{2\sin\omega T}{\omega}=\frac{2T\sin\omega T}{\omega T}=2T\,\mathrm{sinc}\,\omega T$$

$\sin\omega T$

【参考】矩形波がフーリエ変換により周波数軸で「sinc関数」になるようす

$$= \frac{2T \sin \omega T}{\omega T} = 2T \operatorname{sinc} \omega T \quad \left(\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}\right)$$

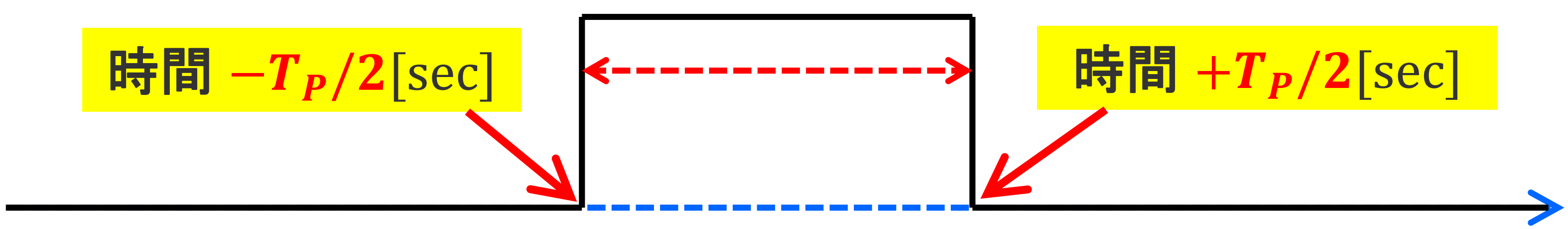
$$= 2T \operatorname{sinc} 2\pi f T$$

$$\operatorname{sinc} 0 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

になる。ド・ロピタルの定理で証明できる

パルス長は$2T$[sec] なので、これを$T_P = 2T$[sec, UI = 1/bps]とすると

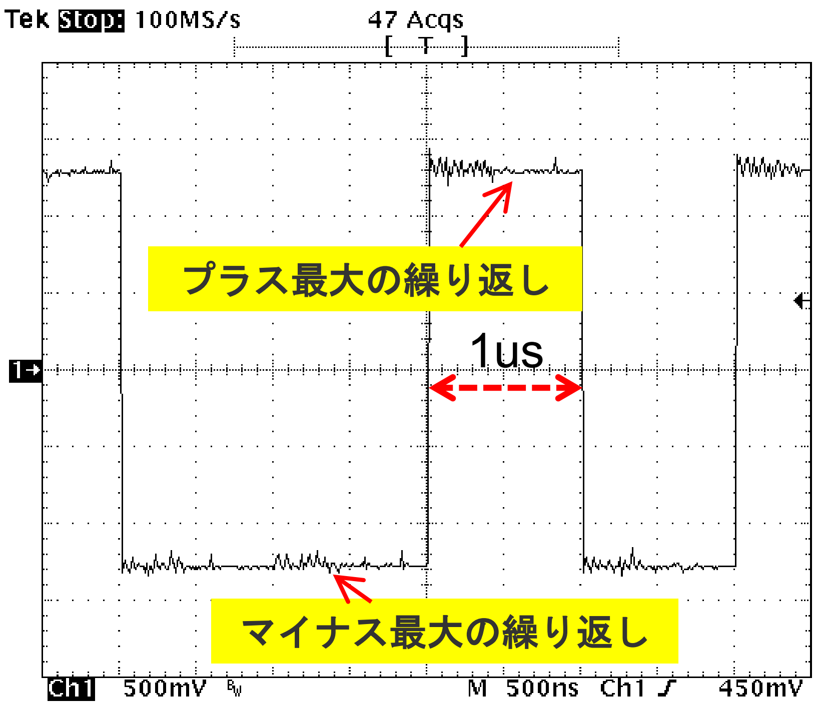
$2T$[sec] → T_P[sec]



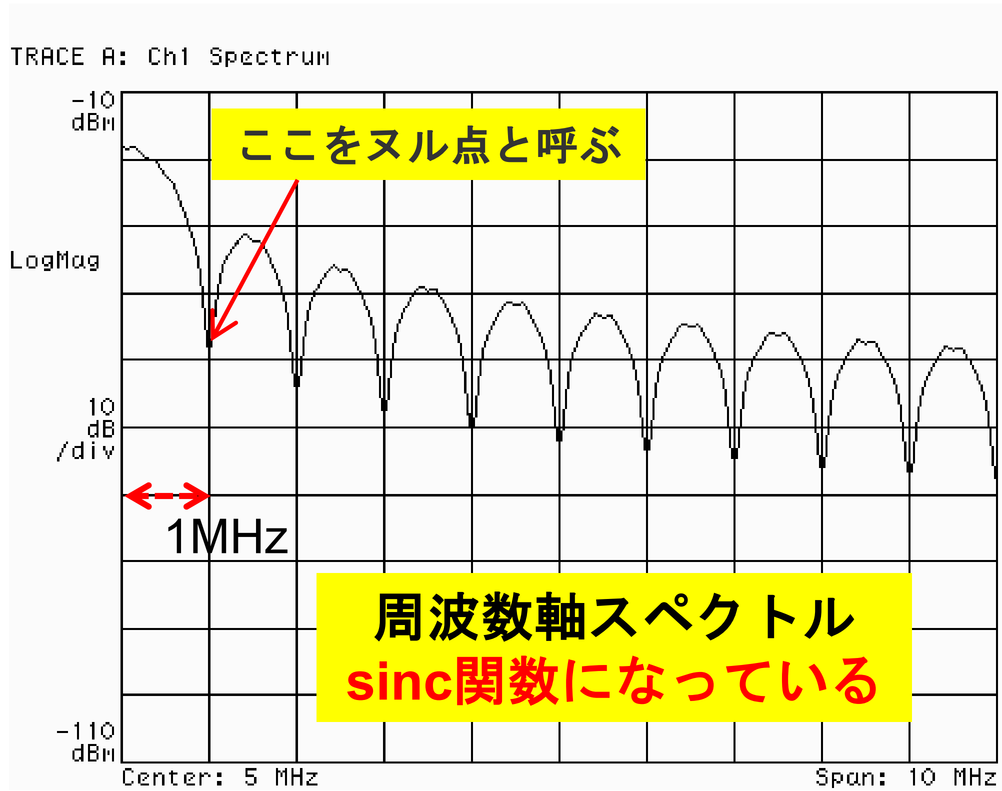
矩形波の波形$f(t)$ 時間軸 [sec]

$$= T_P \operatorname{sinc}\left(2\pi f \frac{T_P}{2}\right)$$

ゼロ次ホールドの周波数スペクトル（フーリエ変換）が「sinc関数」になるようす

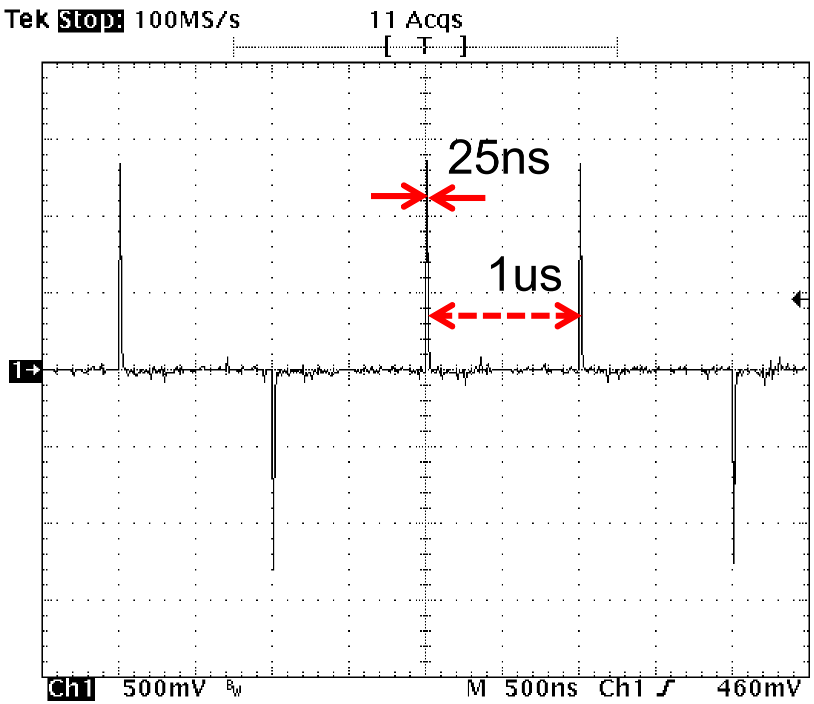


時間軸波形（ゼロ次ホールドでのランダム矩形波）

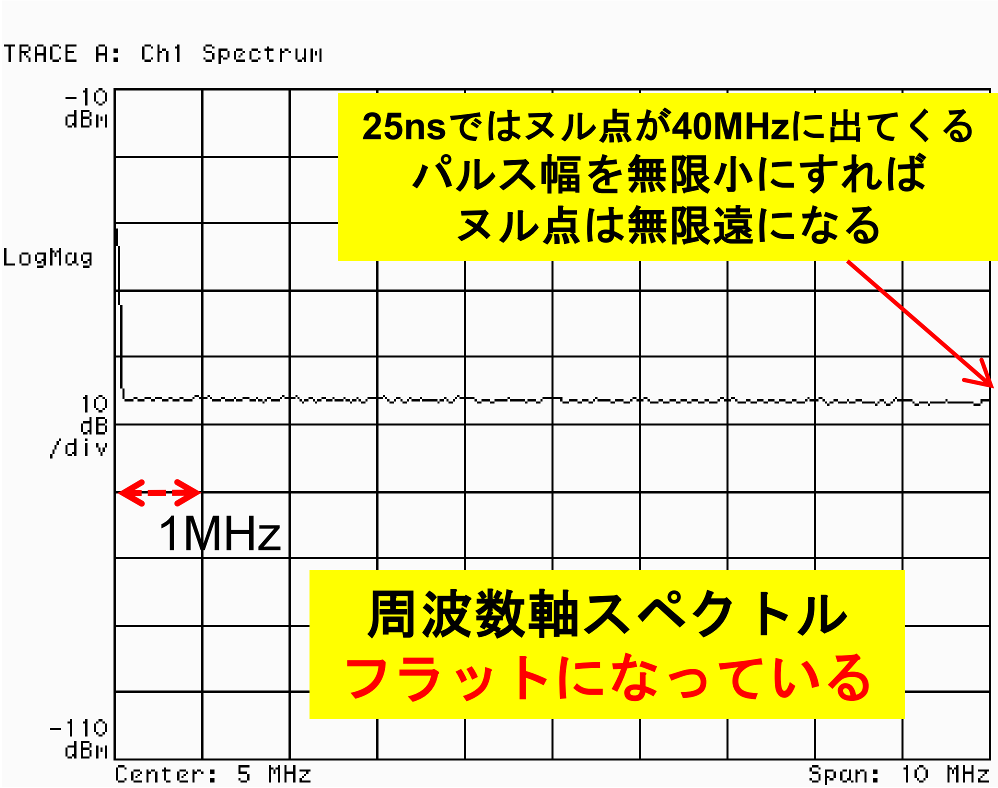


これまで見てきたゼロ次ホールドで、離散信号を
プラス・マイナスの最大で、その発生をランダムとした

インパルス（似な）信号により得られるスペクトル・・・これを無限小にすれば「離散信号になる」



時間軸波形（インパルス似なランダム波形）



25nsではヌル点が40MHzに出てくる
パルス幅を無限小にすれば
ヌル点は無限遠になる

周波数軸スペクトル
フラットになっている

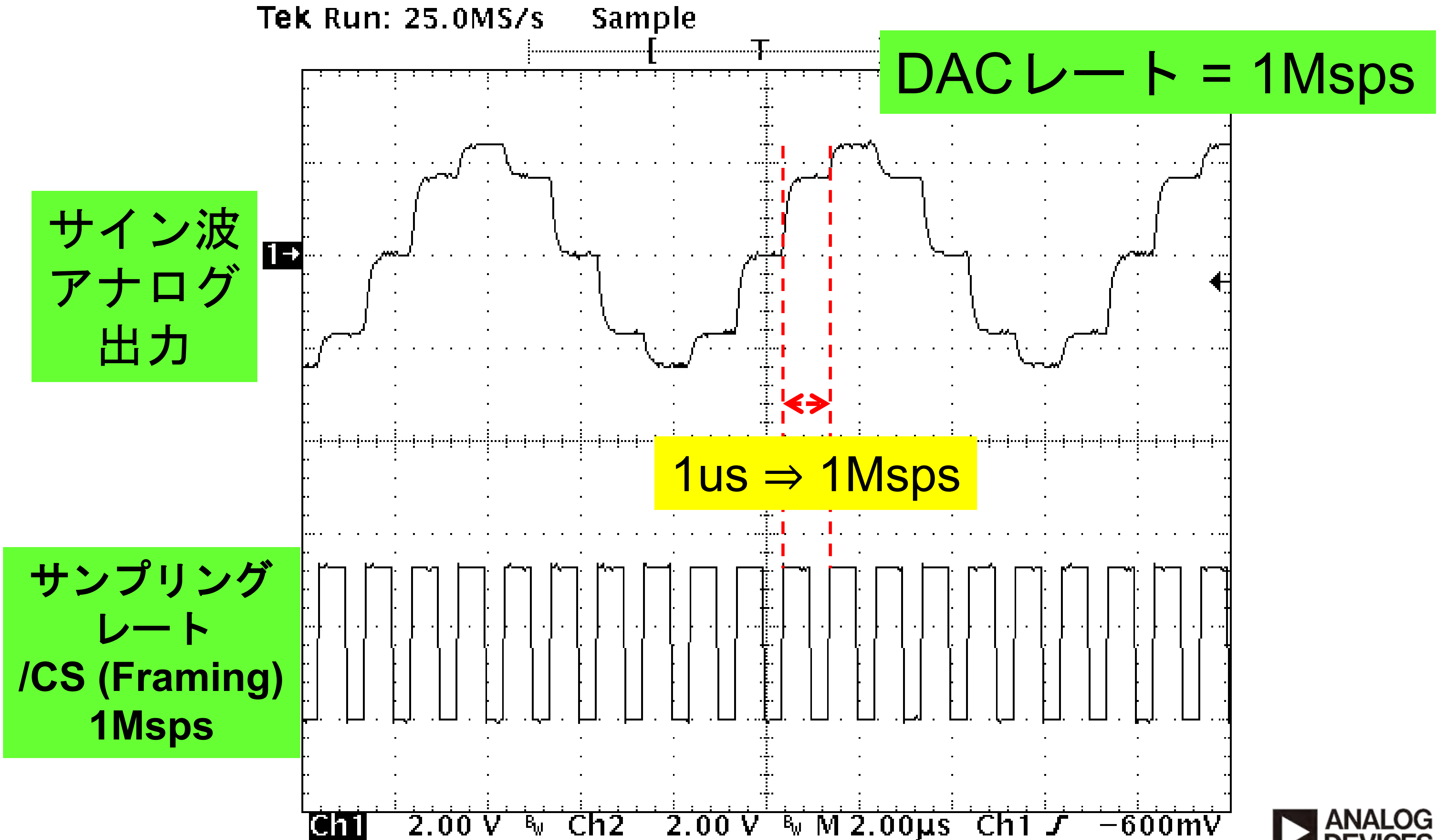
波形をパルス状（インパルス似）にすれば、離散信号のスペクトルになってくる（最初に示したもの）

想像を超える可能性を

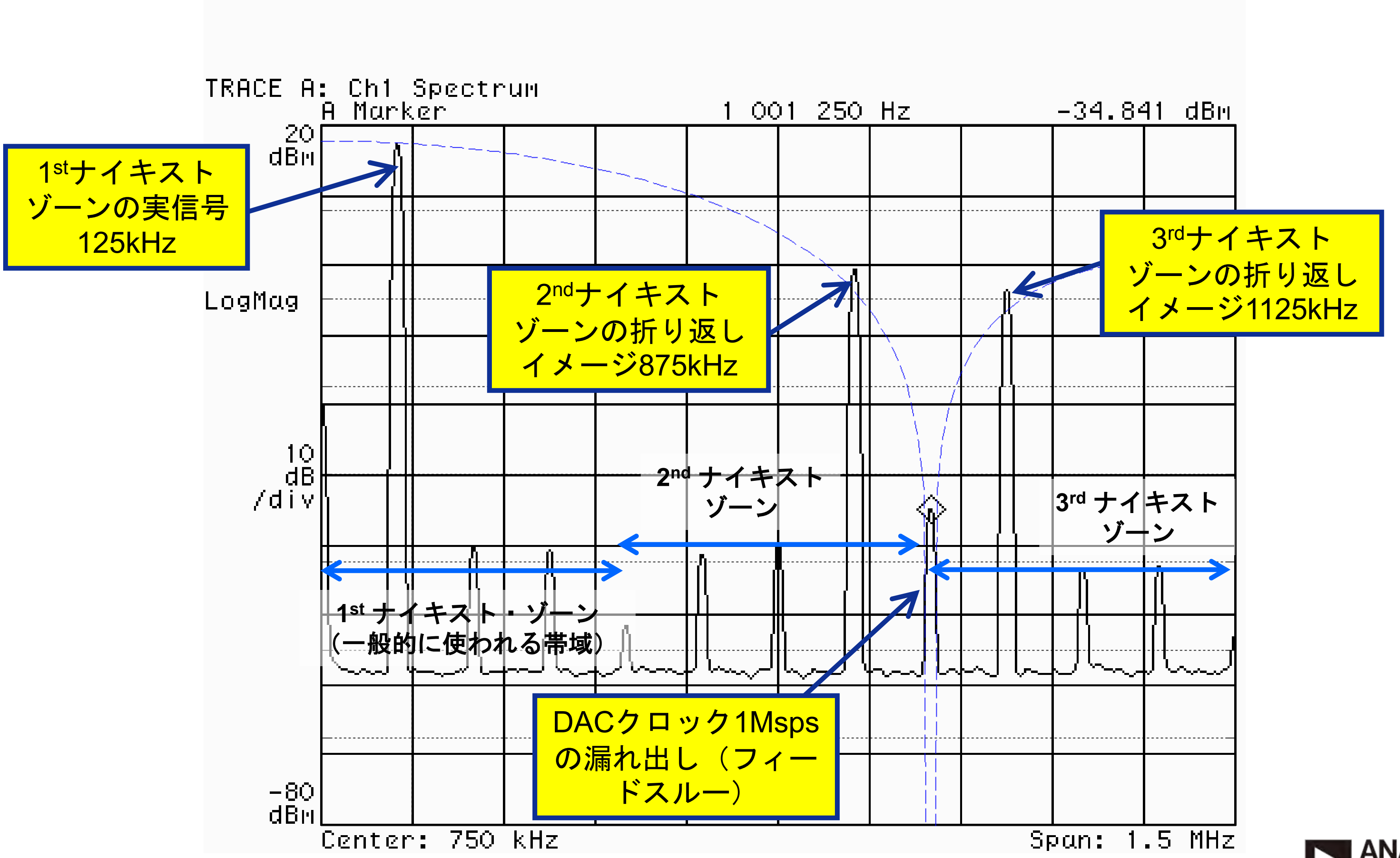
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

4. 折り返しと高次ナイキストゾーンと信号位相関係はどう考える

1Mspsのサンプリング・クロックで125kHzを出力してみる
（ノーマルモード・ゼロ次ホールドの波形）

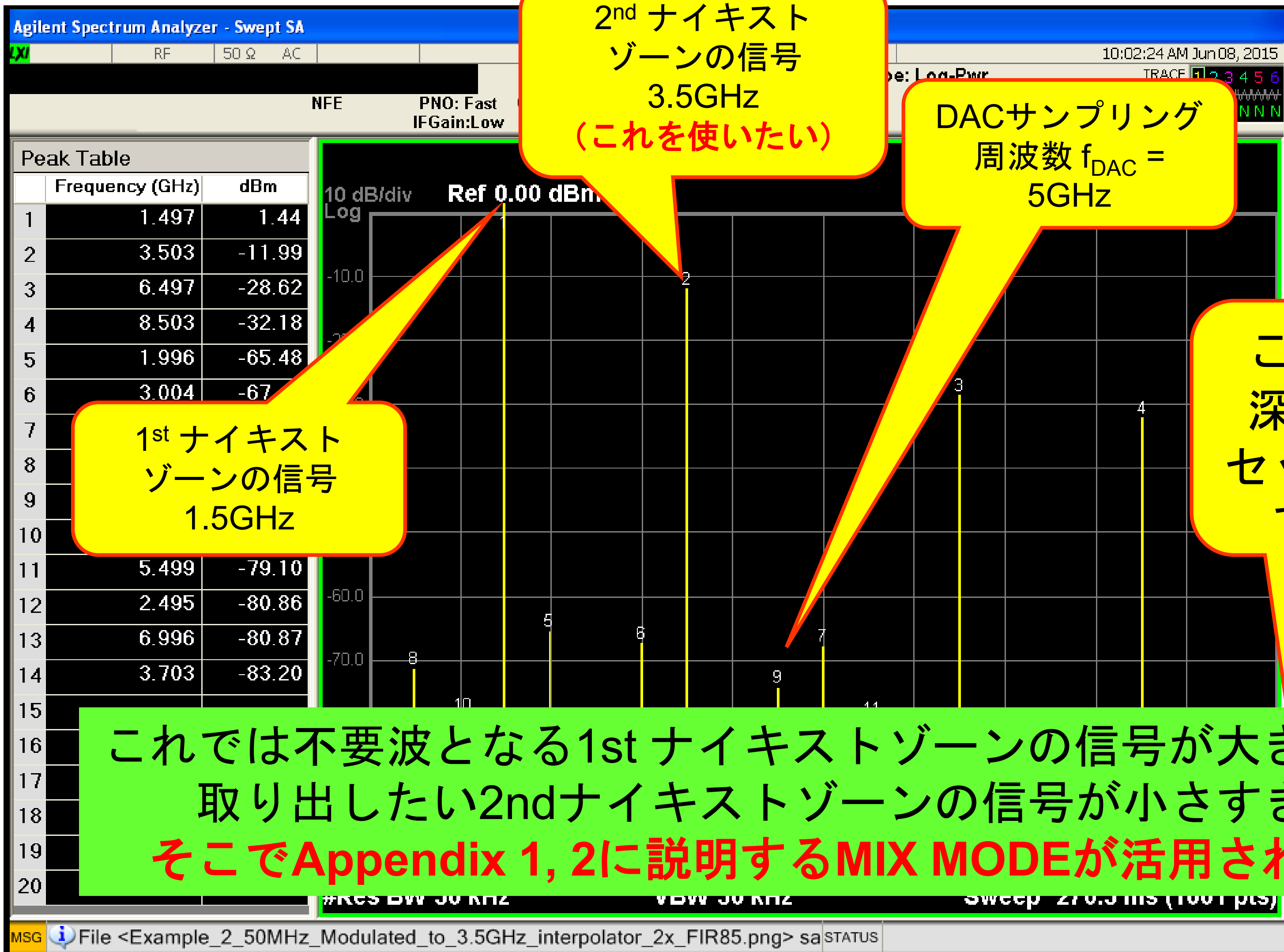


先の時間波形でのスペクトル：生成される折り返しイメージとナイキスト・ゾーンとsinc関数の関係



ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

超高速DACでは高次ナイキスト・ゾーンでの折り返しイメージ・スペクトルが活用される（ノーマルモードでの波形例）



	Frequency (GHz)	dBm
1	1.497	1.44
2	3.503	-11.99
3	6.497	-28.62
4	8.503	-32.18
5	1.996	-65.48
6	3.004	-67
7		
8		
9		
10		
11	5.499	-79.10
12	2.495	-80.86
13	6.996	-80.87
14	3.703	-83.20
15		
16		
17		
18		
19		
20		

2nd ナイキスト
ゾーンの信号
3.5GHz
（これを使いたい）

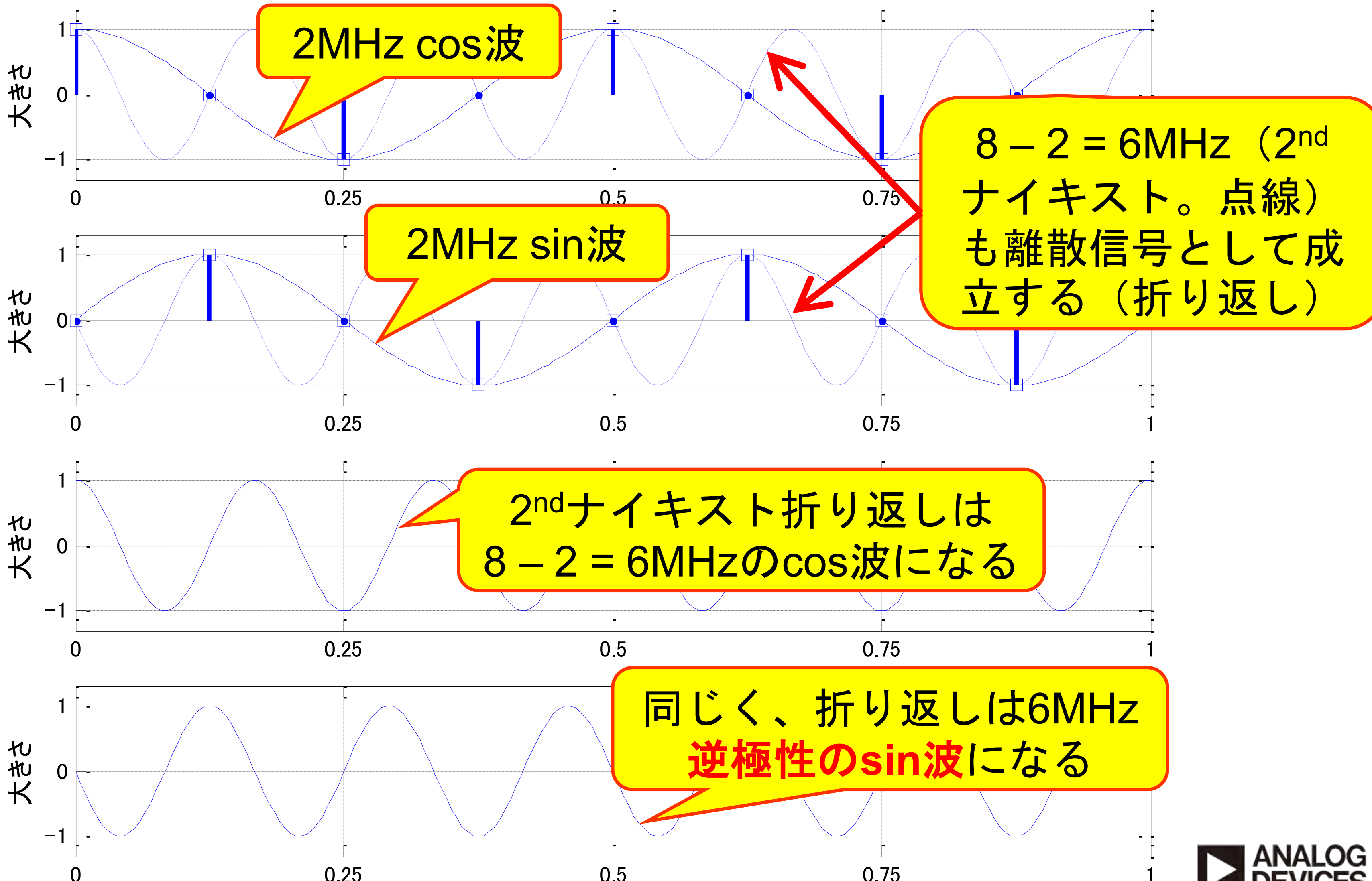
DACサンプリング
周波数 f_{DAC} =
5GHz

1st ナイキスト
ゾーンの信号
1.5GHz

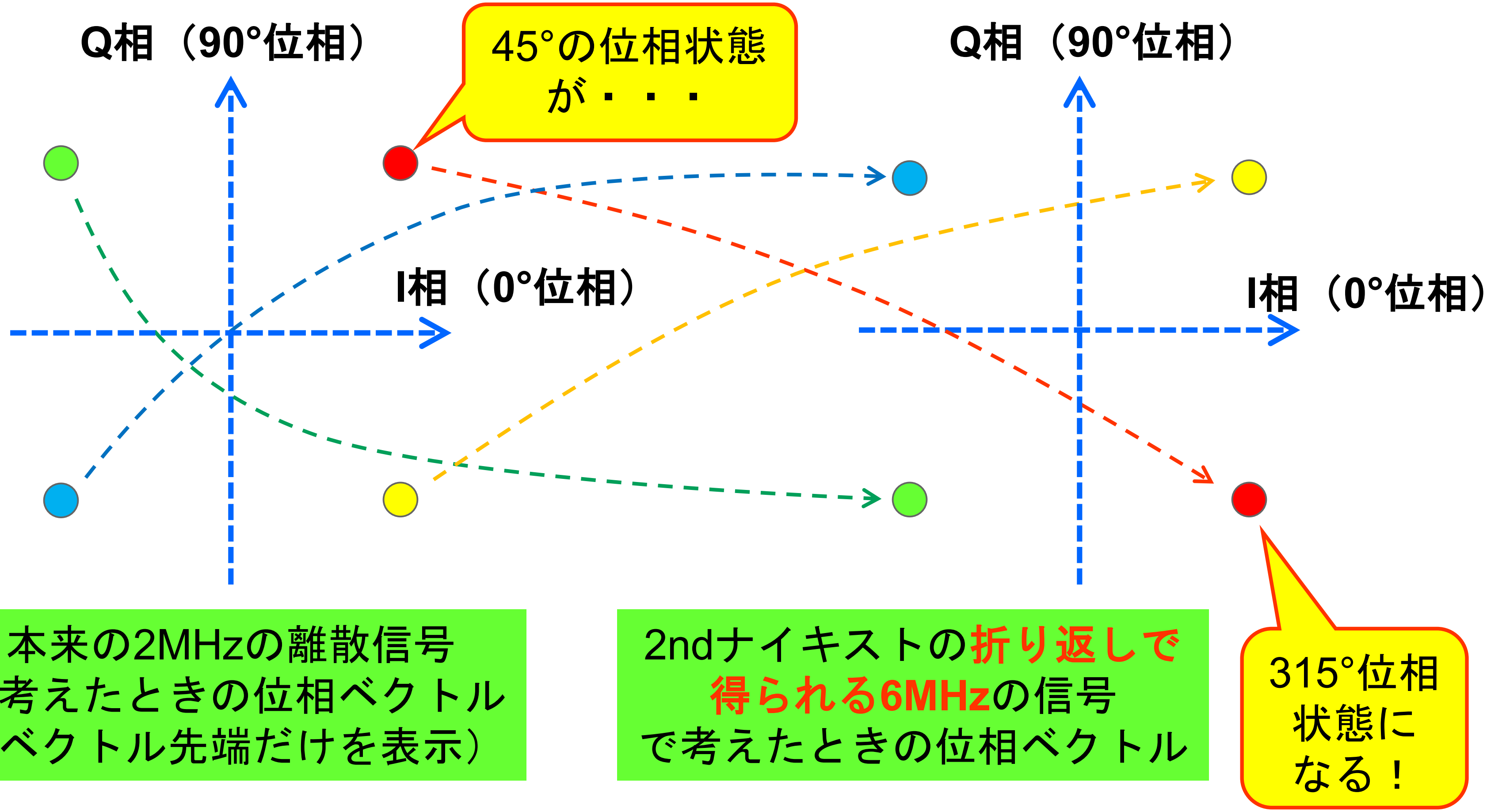
この動きも興味深く、またこのセッションの説明で理解できる

これでは不要波となる1st ナイキストゾーンの信号が大きすぎ、
取り出したい2ndナイキストゾーンの信号が小さすぎる
そこでAppendix 1, 2に説明するMIX MODEが活用される！

【活用時に知っておきたいこと】偶数次ナイキスト・ゾーンでの折り返し信号の位相関係（サンプリング周波数$f_S = 8\mathrm{MHz}$で説明）



偶数次折り返し信号の位相関係は無線通信で要注意（4相位相変調; QPSKでの例）



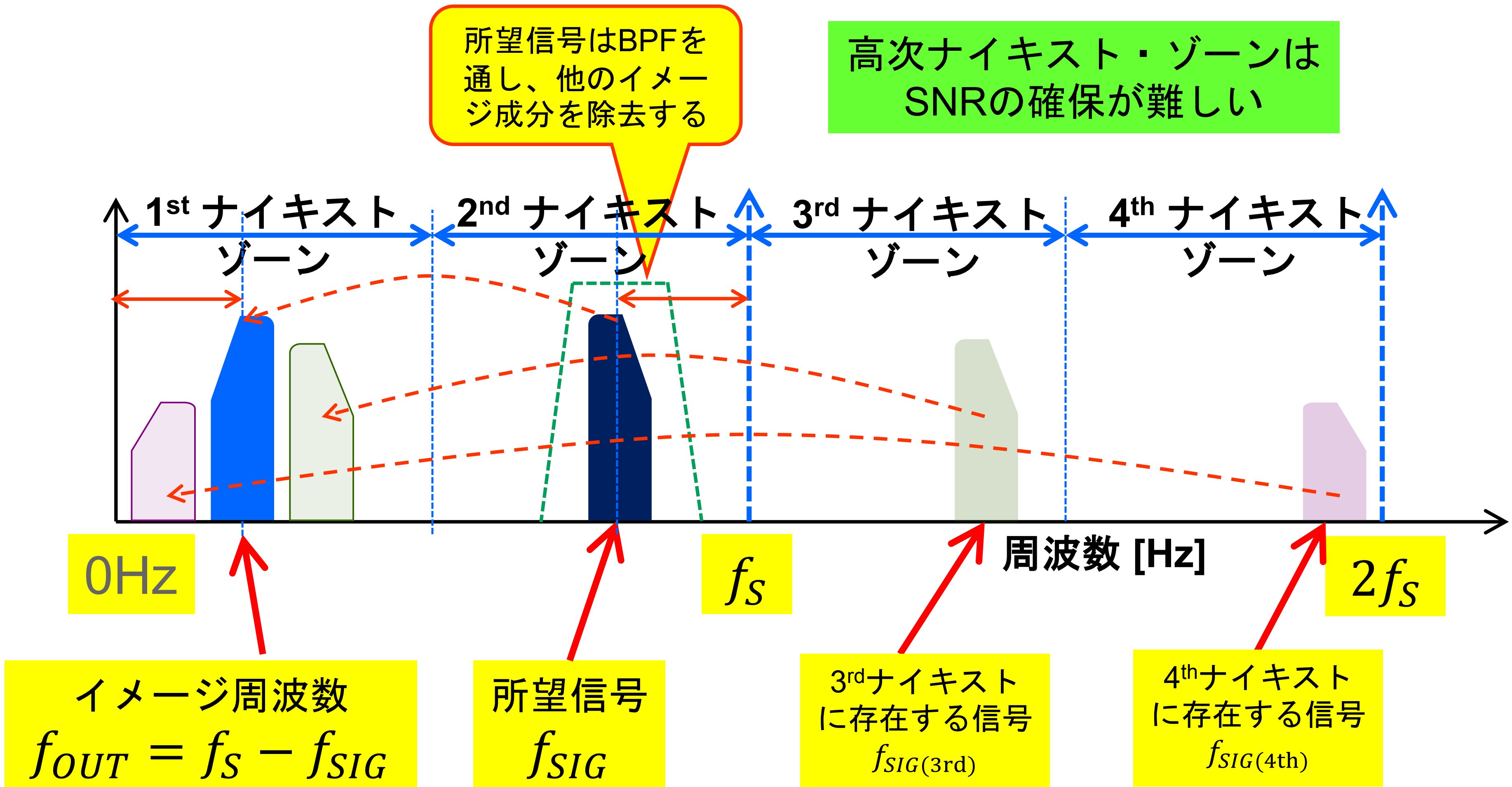
振幅はゼロ周波数（サンプリング周波数）を中心として偶関数。位相は奇関数（逆相になる）

$$X_{smp}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(\omega - n\omega_0)$$ からも（実は）分かる

ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

高速ADCでも高次ナイキスト・ゾーンを「ダウンサンプリング（バンドパス・サンプリング）として活用されている！

2nd、4thナイキスト・ゾーンはこれまでの説明と同様に位相が逆転する

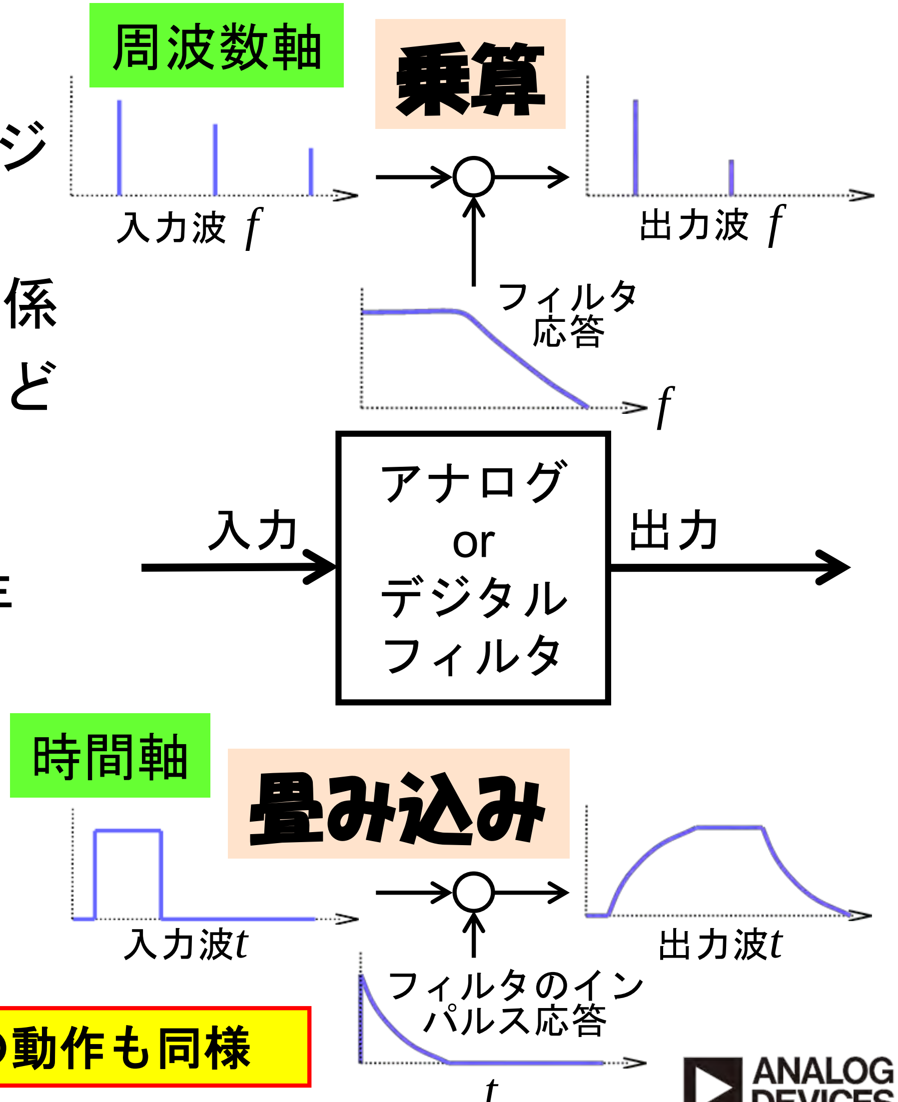


5. 信号処理理論とDACスペクトルの考え方（乗算と畳み込み; Convolution）

これからの説明を理解するメリット

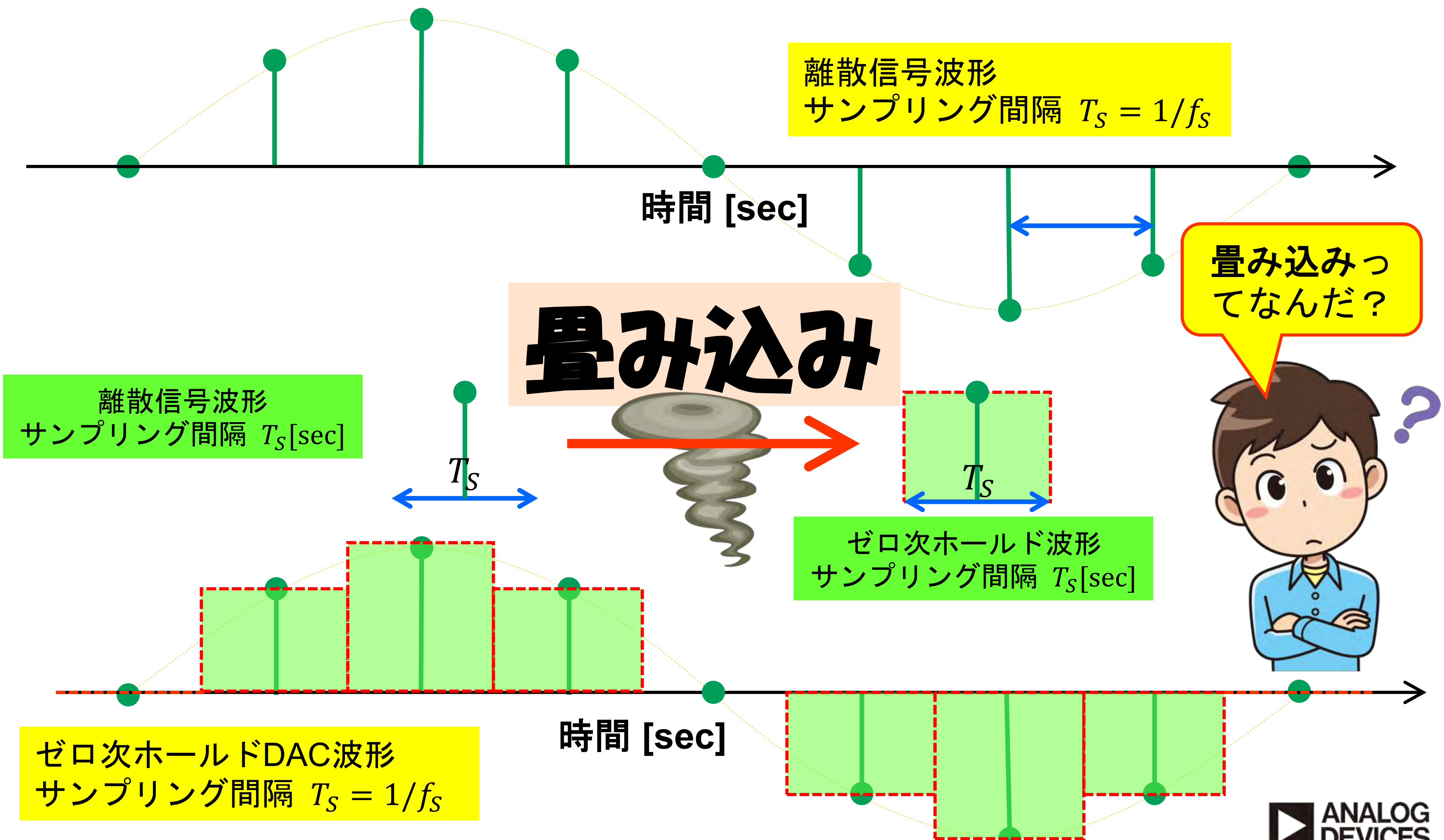
- **畳み込みを知ることで**
  - シグマデルタADCやFPGAのデジタルフィルタの特性と時間遅延
  - アナログフィルタの入出力の関係
  - 有線・無線通信、窓関数処理など

  の動作を理解できる
- **時間軸と周波数軸との関係**が非常にクリアになり、回路を深く見通せる



DACの動作も同様

説明してきた離散信号からDACのゼロ次ホールド（矩形波）への変換は時間軸上での「畳み込み」になる



畳み込み（Convolution;「畳み込み積分」とも呼ばれる）とは

畳み込み（Convolution）は、式（理論系書籍）ではこのように表現される

ある時間 t において

波形間を乗算した形状を全体を変数 x で積分する

$$
(s * g)(t) = s(t) * g(t)
$$

$$
= \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) \cdot g(t - x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - x) \cdot g(x)\, dx
$$

これでは何を言っているかわからない！

そこで
畳み込み（Convolution）のイメージを以降に、
また日常生活におけるイメージを参考文献に示す
https://ja.wikipedia.org/wiki/畳み込み
も参考になる

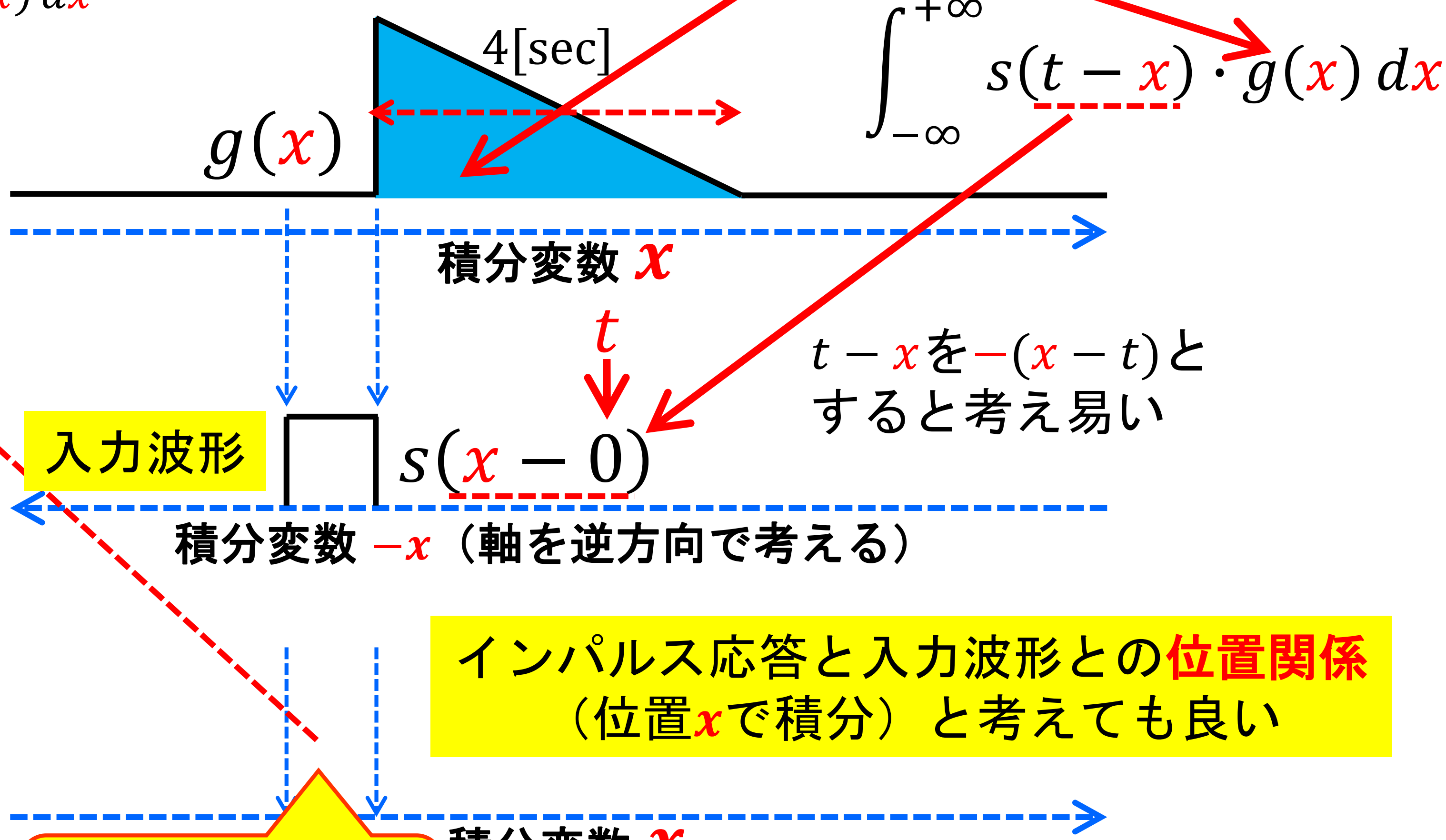
畳み込み動作のアニメーション（$t=0$）

これは系にインパルス（デルタ関数）を加えたときの時間軸応答で「**インパルス応答**」と言う。DACではゼロ次ホールドの矩形波

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t-x)\cdot g(x)\,dx$$

$t=0$

出力波形
畳み込みの結果



インパルス応答と入力波形との**位置関係**（位置xで積分）と考えても良い

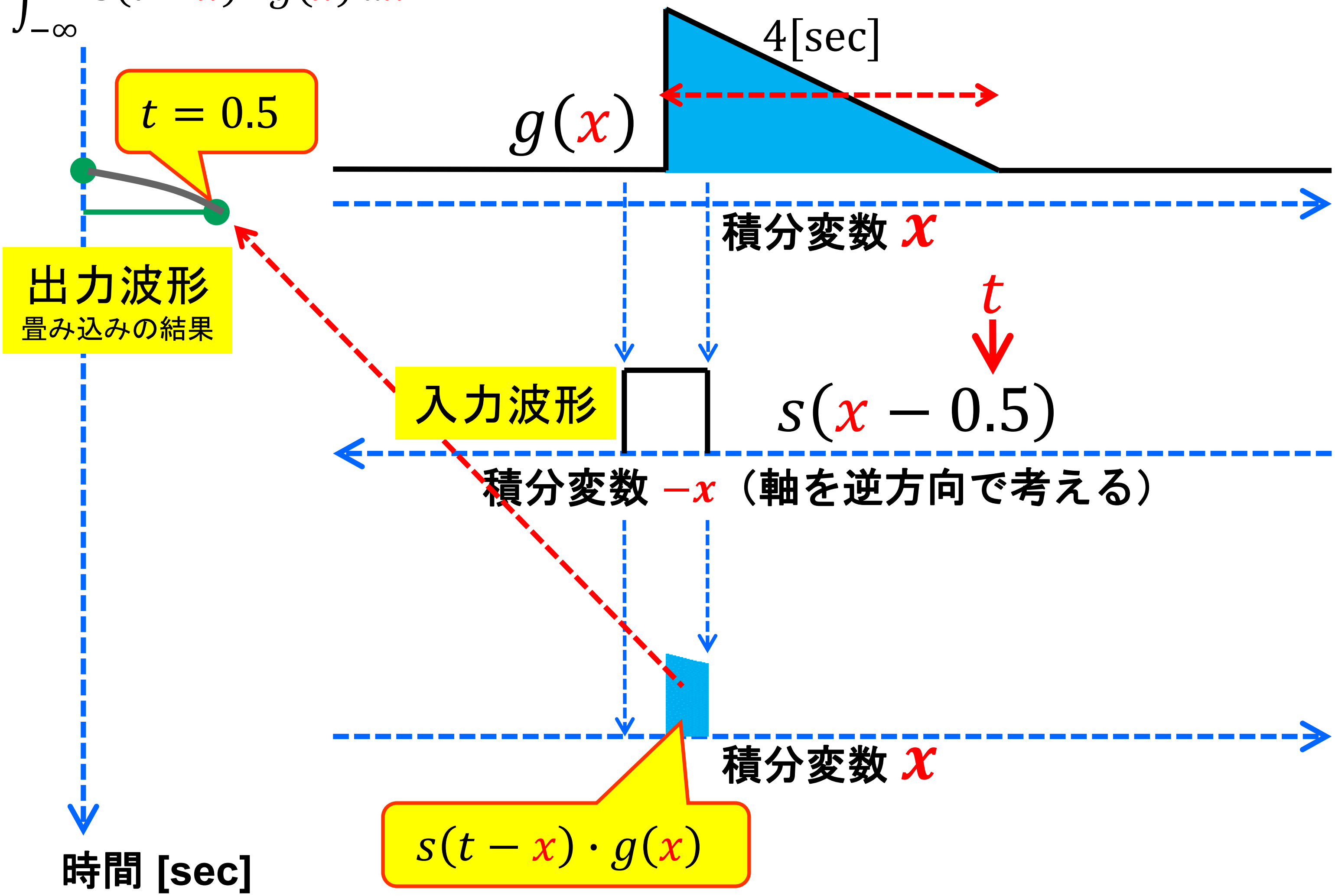
$s(t-x)\cdot g(x)$
掛け算結果はゼロ

時間 [sec]

ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

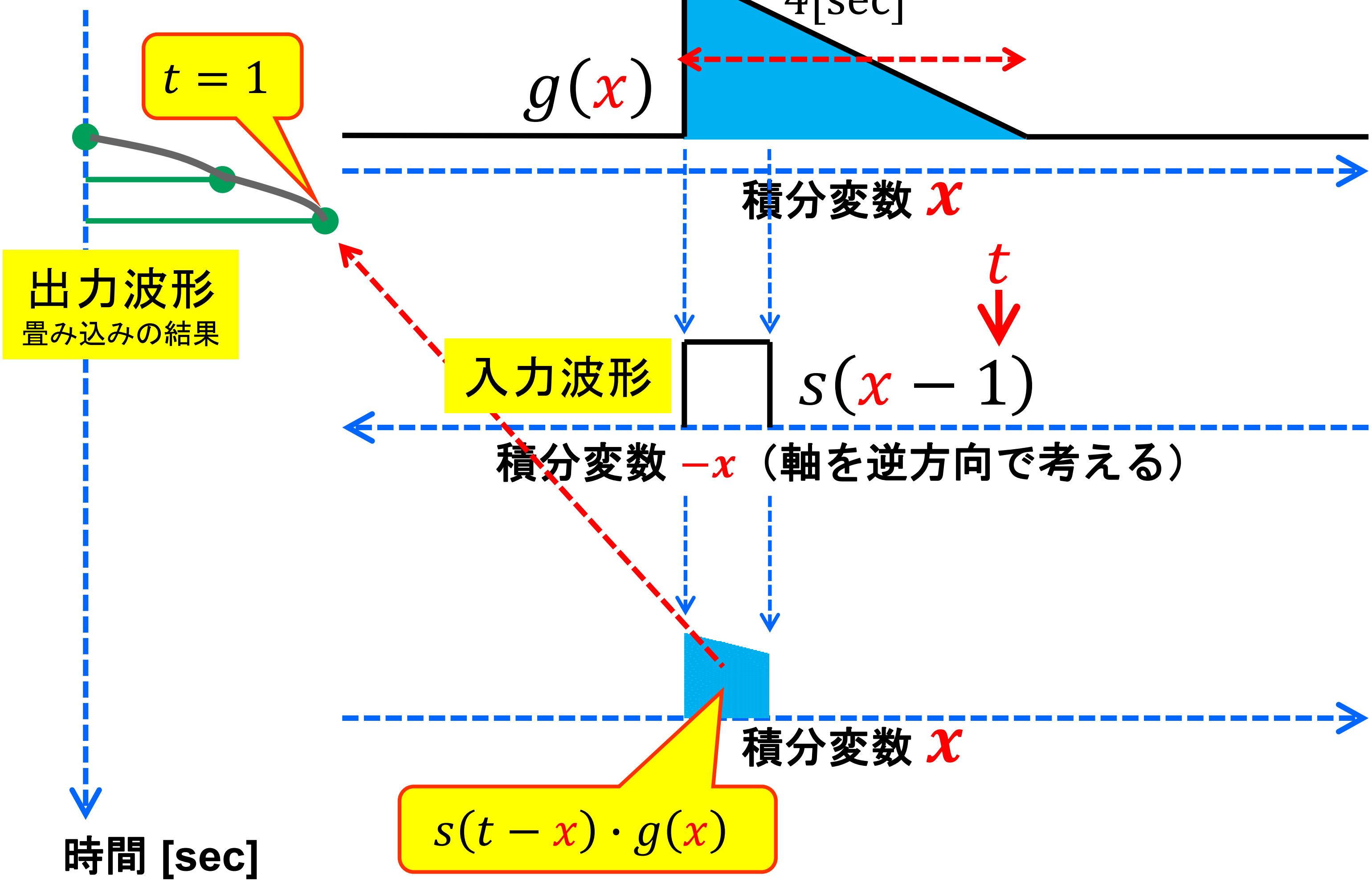
畳み込み動作のアニメーション（ $t = 0.5$ ）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t - x) \cdot g(x)\, dx$$



畳み込み動作のアニメーション（$t=1$）

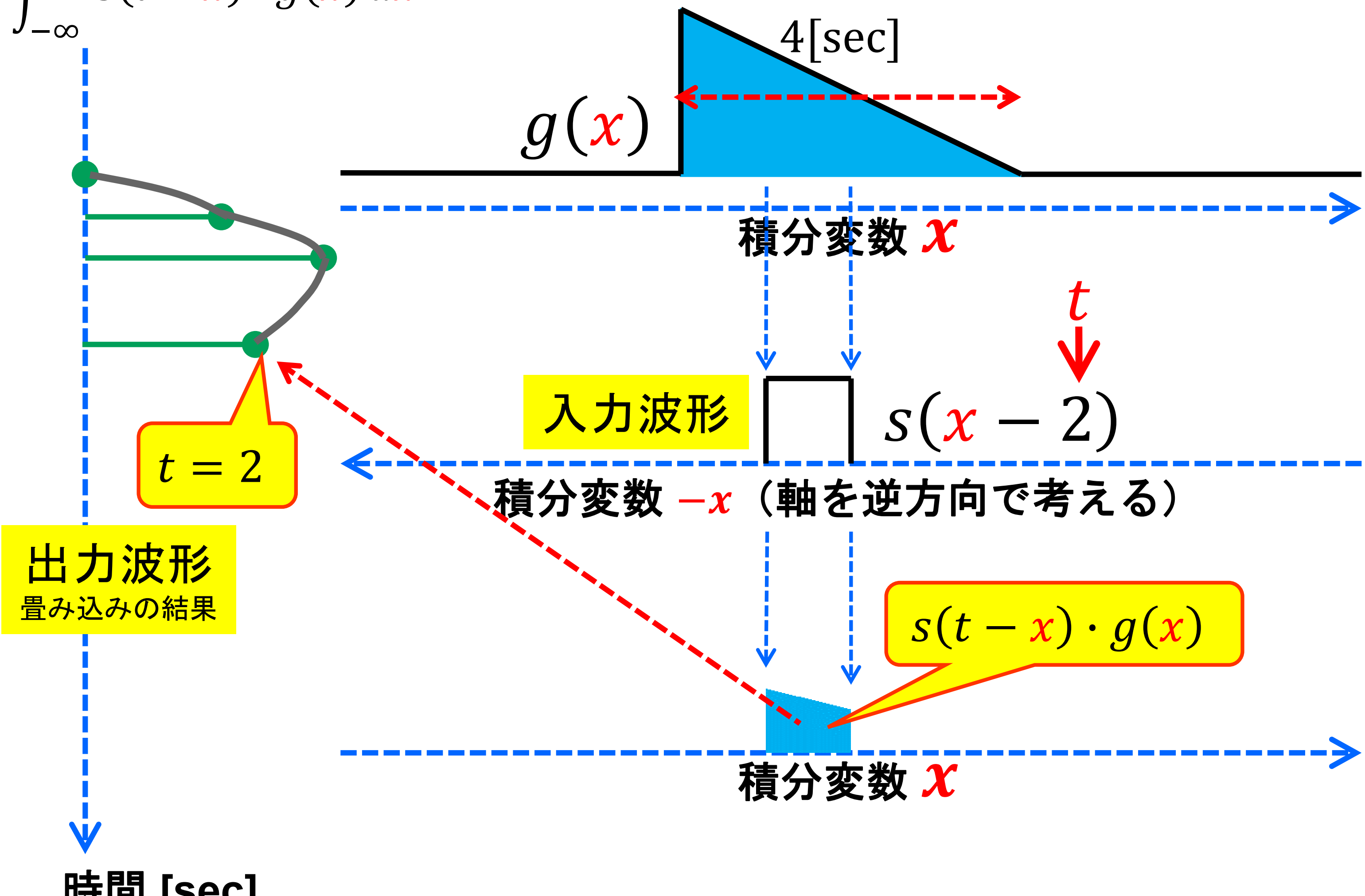
$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t-x)\cdot g(x)\,dx$$



ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

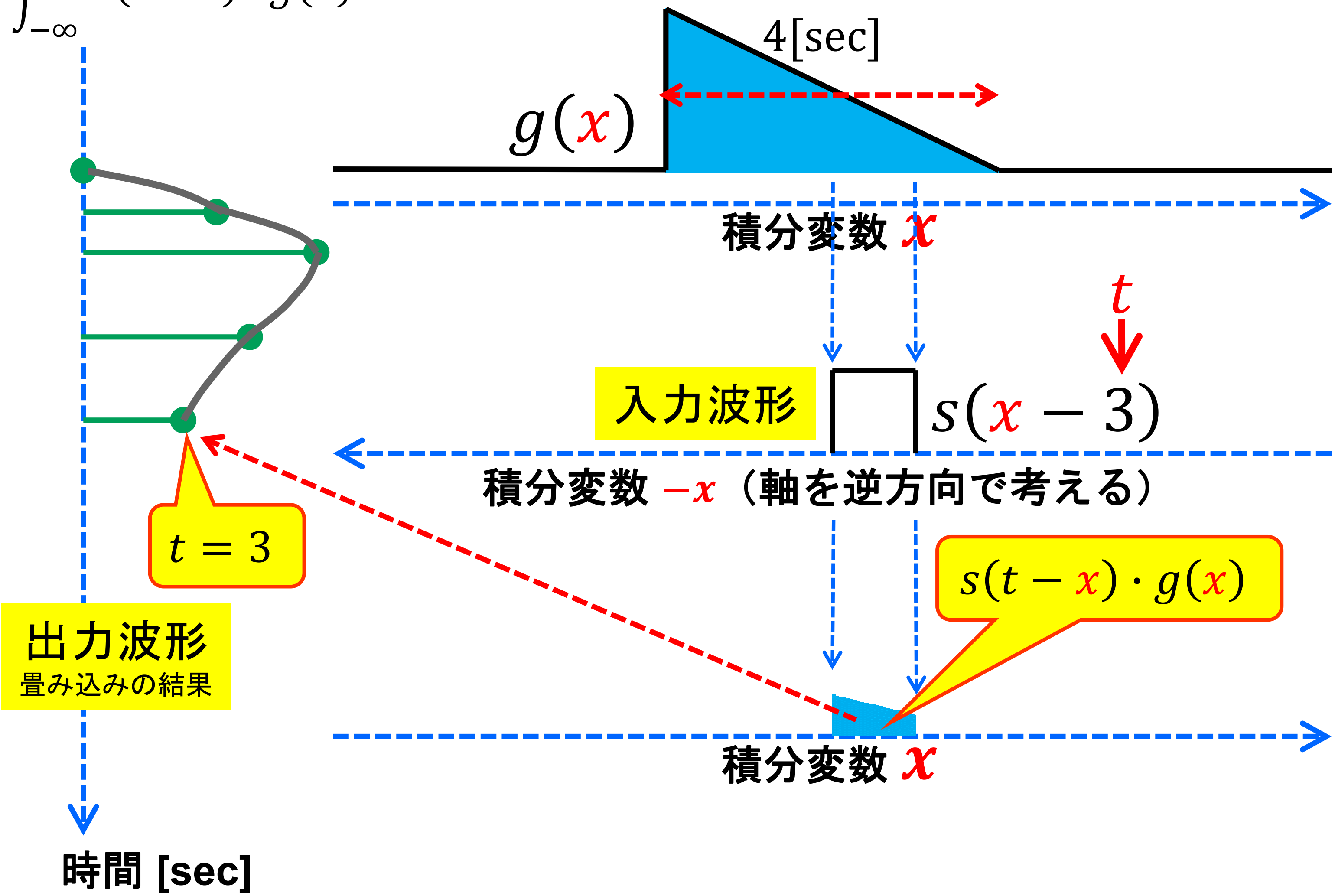
畳み込み動作のアニメーション（$t = 2$）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t-x)\cdot g(x)\,dx$$



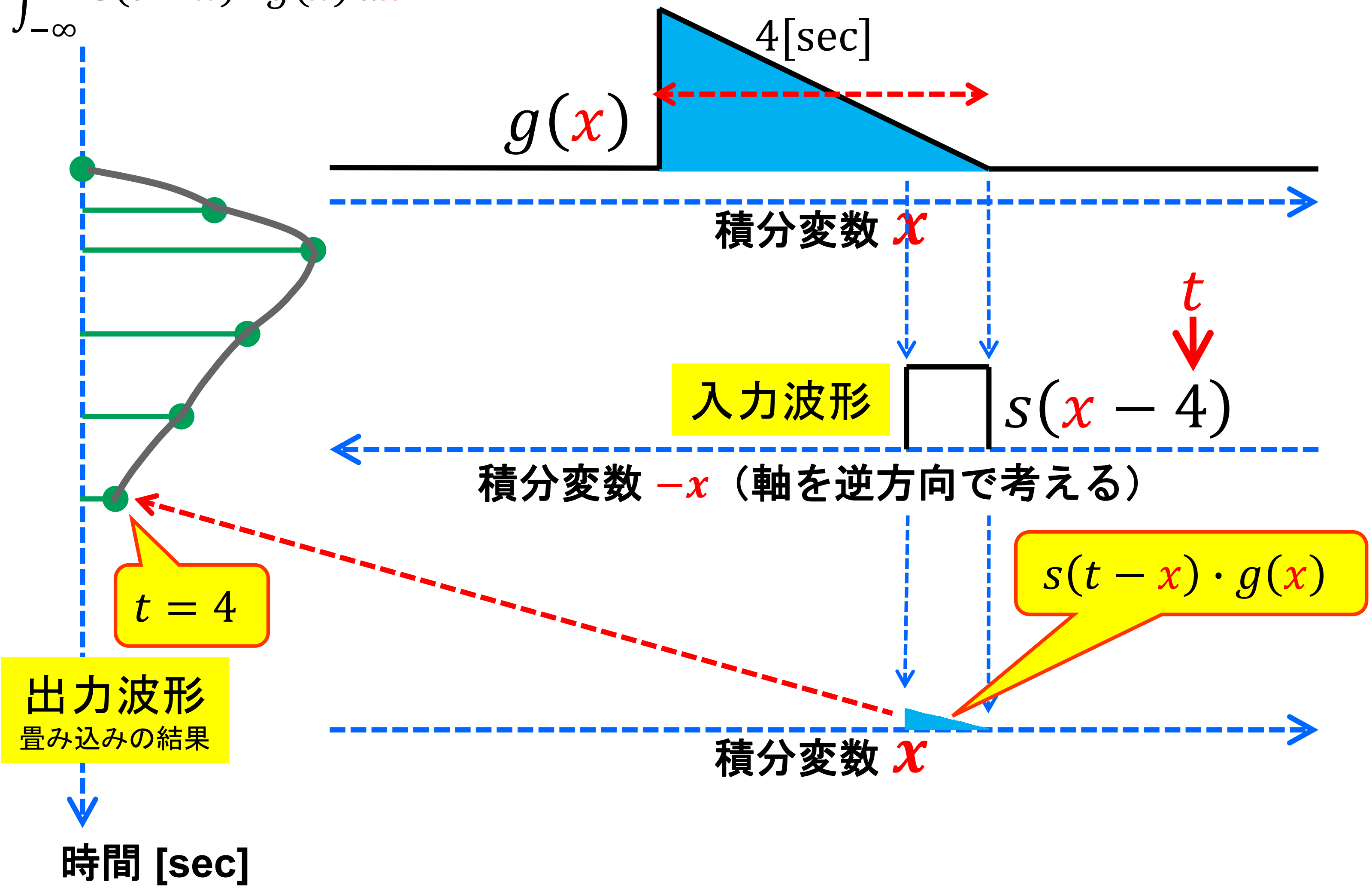
畳み込み動作のアニメーション（$t = 3$）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t-x)\cdot g(x)\,dx$$



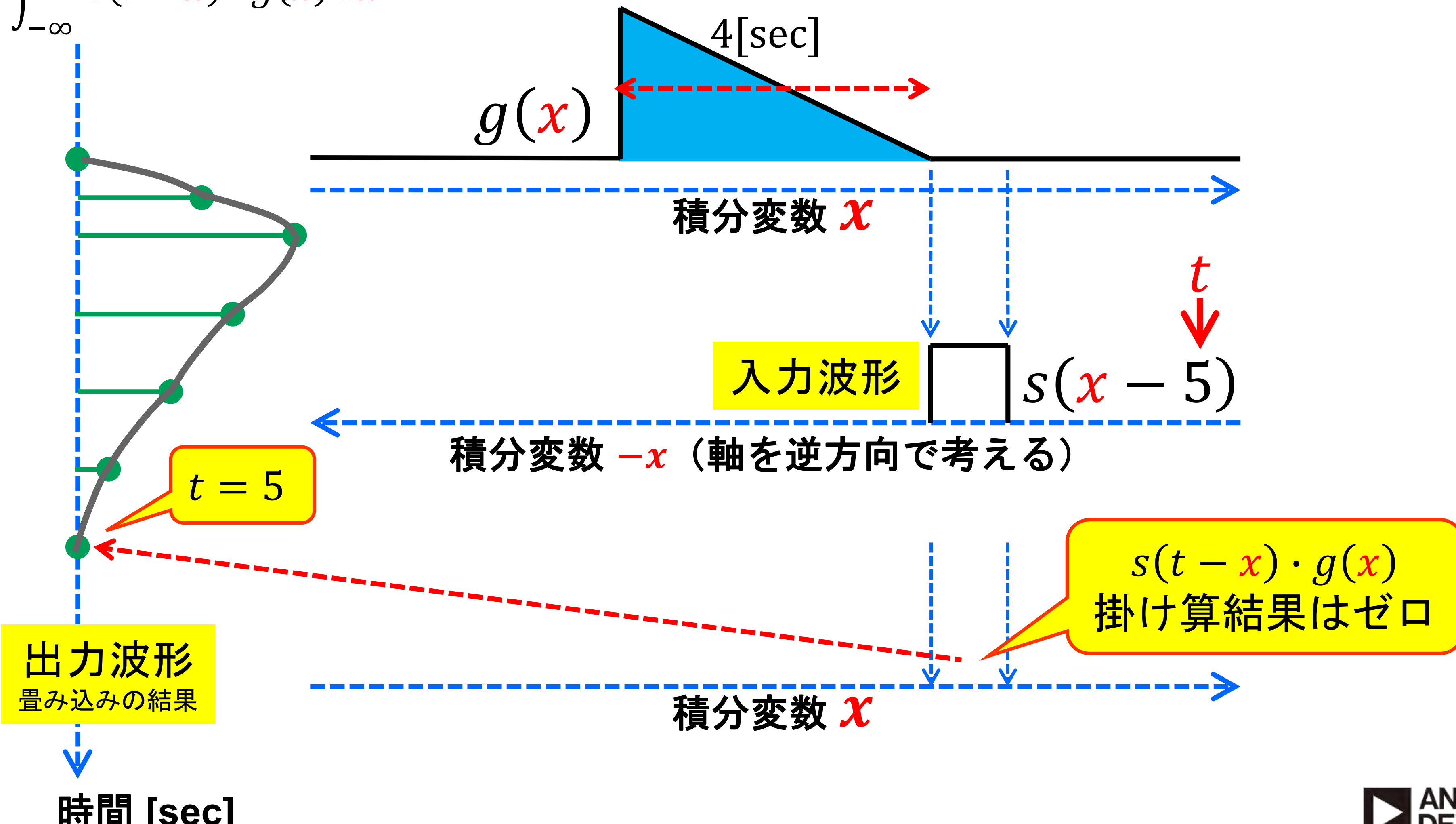
畳み込み動作のアニメーション（$t = 4$）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t - x) \cdot g(x)\, dx$$

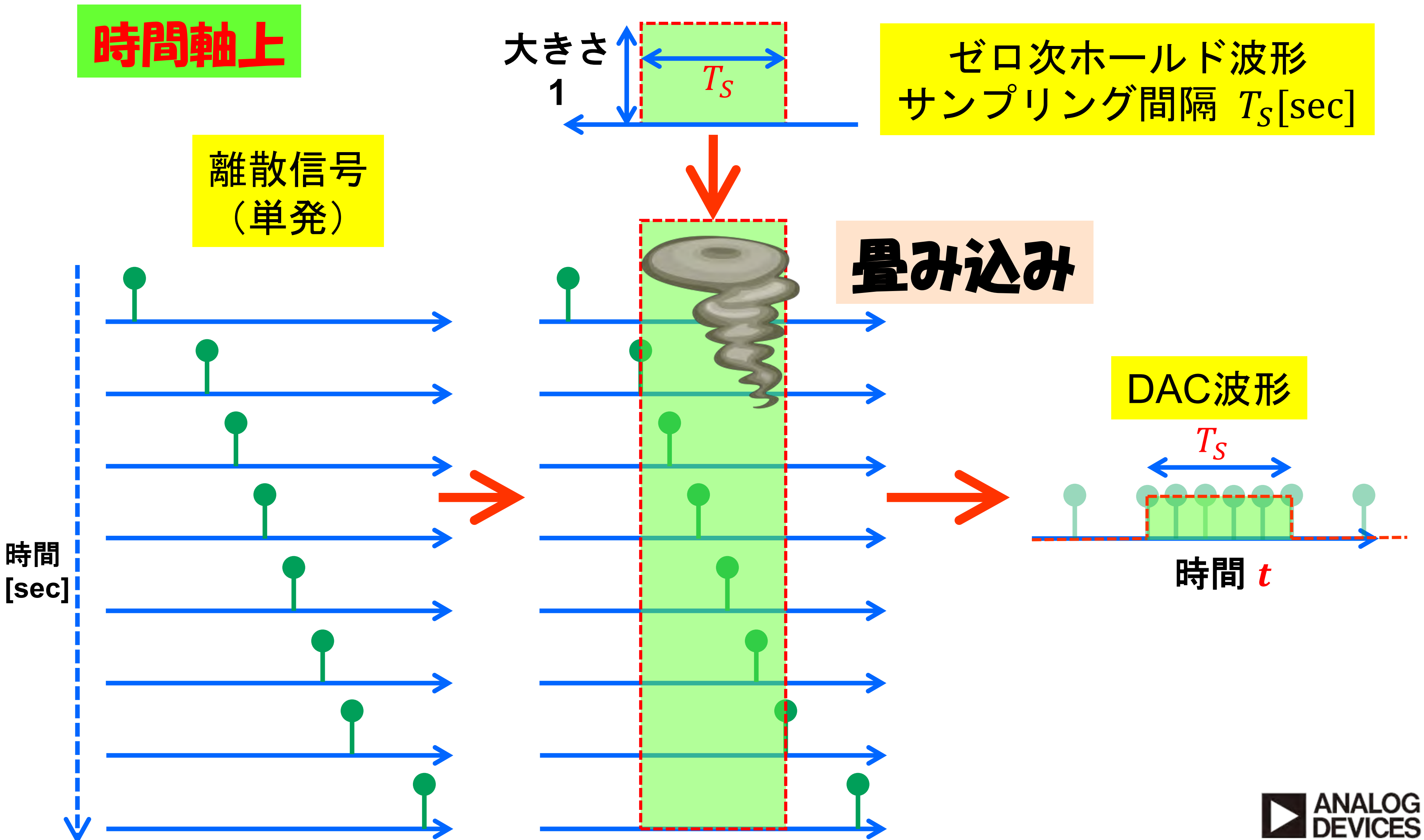


畳み込み動作のアニメーション（$t = 5$）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t - x) \cdot g(x)\, dx$$

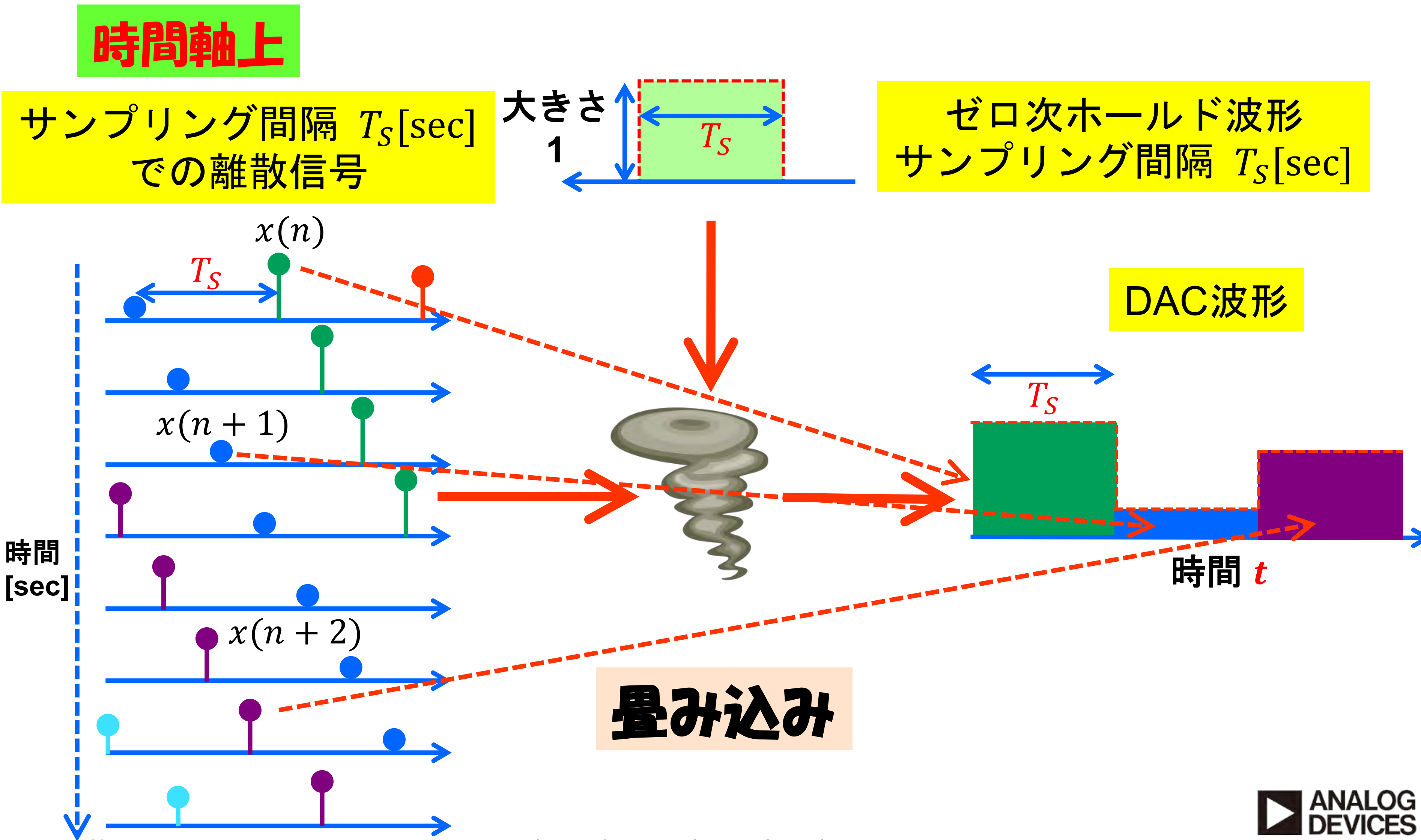


離散信号からゼロ次ホールド（矩形波）への変換は畳み込み
（離散信号をT_S長でフィルタリングしたとも考えられる）

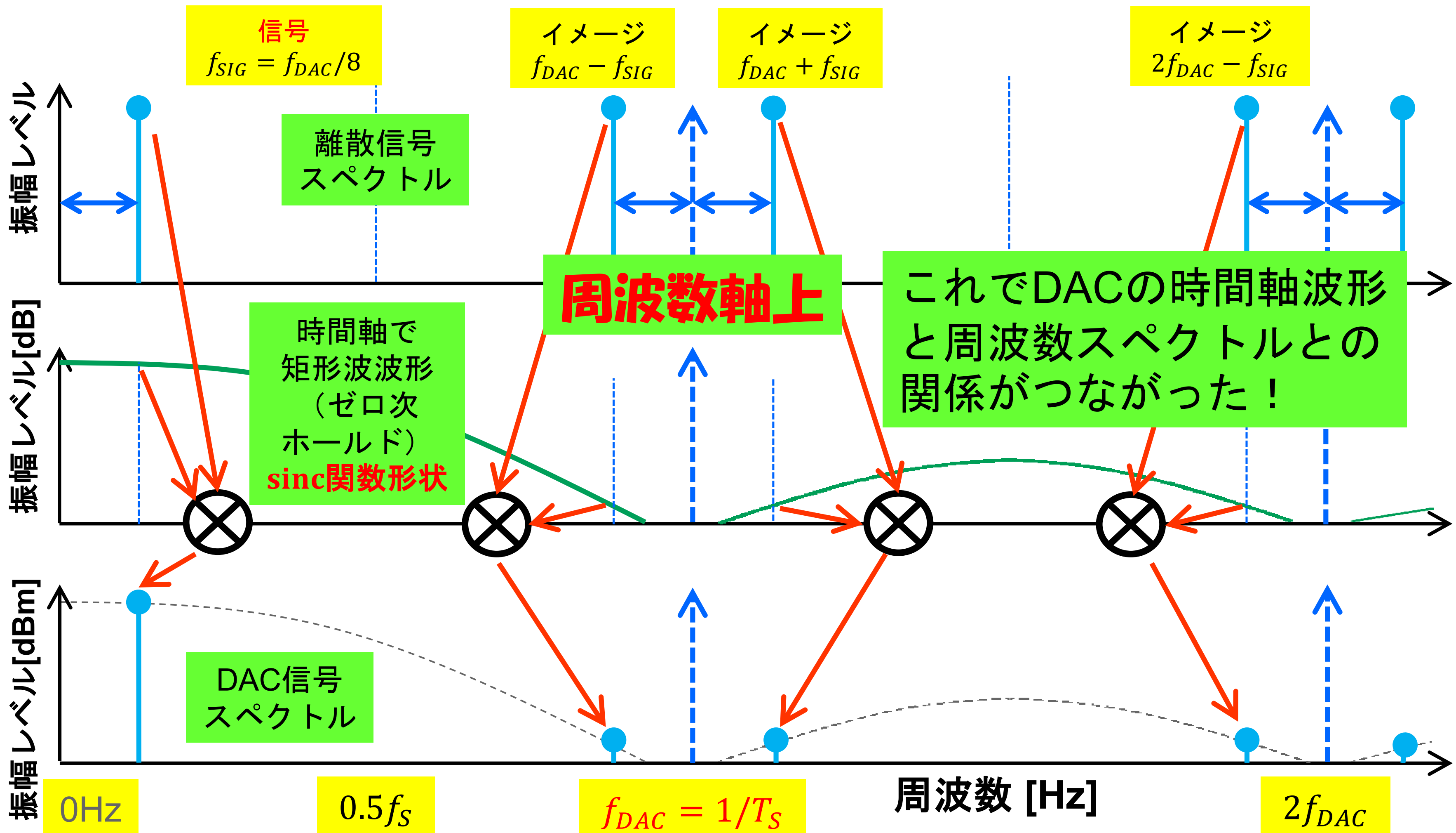


ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

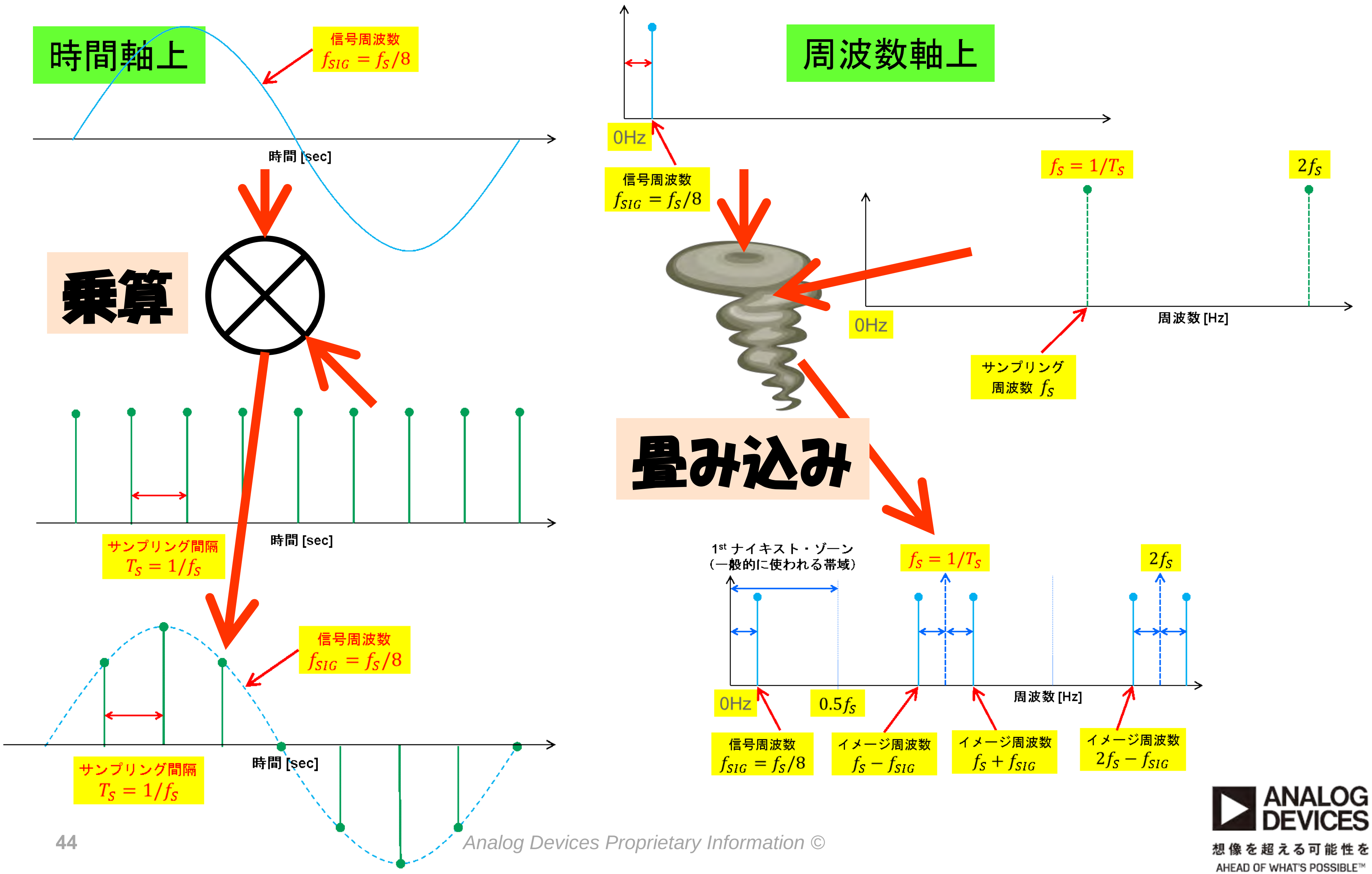
離散信号からゼロ次ホールド（矩形波）への変換は畳み込み（続き）



離散信号からDACのゼロ次ホールドへの変換は
周波数軸上では「乗算」（最初のsinc関数で説明のとおり）



AD変換は・・・時間軸での乗算、周波数軸での畳み込み（DACとは逆の関係）



ここまでの説明の数学的解説
フーリエ変換で時間軸と周波数軸がつながっているのとあわせて理解したい

時間軸t

角周波数軸ω

$$s(t) \xleftrightarrow[\text{フーリエ変換対}]{S(\omega)=\mathfrak{I}(s(t))} S(\omega)$$

$$g(t) \xleftrightarrow[\text{フーリエ変換対}]{G(\omega)=\mathfrak{I}(g(t))} G(\omega)$$

時間軸の乗算

周波数軸の畳み込み

$$s(t)\cdot g(t) \xleftrightarrow[\text{フーリエ変換対}]{(S*G)(\omega)=\mathfrak{I}(s(t)\cdot g(t))} (S*G)(\omega)$$

時間軸の畳み込み

周波数軸の掛け算

$$(s*g)(t) \xleftrightarrow[\text{フーリエ変換対}]{S(\omega)\cdot G(\omega)=\mathfrak{I}((s*g)(t))} S(\omega)\cdot G(\omega)$$

時間軸変数tと角周波数軸変数ωで説明したが、他のフーリエ変換対のシステムでも全く同様。デジタル信号処理のz変換にも適応できる

6. まとめ・参考文献

まとめ

- 時間軸の矩形関数は、周波数軸でのsinc関数（周波数での矩形関数は時間軸のsinc関数）になる
- 「畳み込み」の概念をご説明
- 時間軸の畳み込みは、周波数軸での掛け算（周波数での畳み込みは、時間軸の掛け算）になる
- これにより、**時間軸と周波数軸との関係**が非常にクリアになり、各種システムにも応用できる知識となる

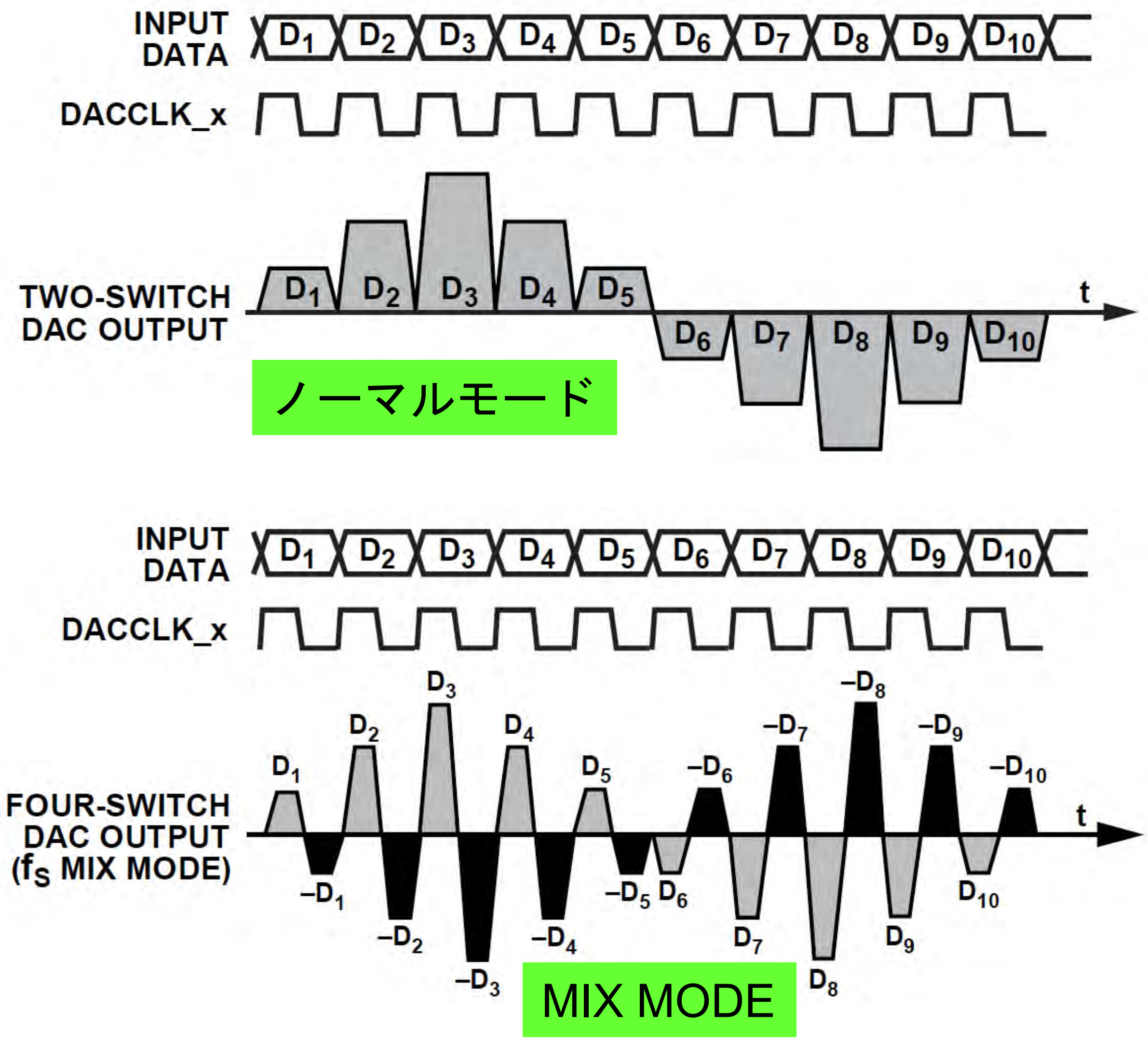
参考文献

- 畳み込み（とインパルス応答やデジタルフィルタ）を日常のイメージとして表現したもの
  - 「合点！電子回路超入門; CQ出版社」の第19章「畳み込み」の
    - 図19-2 畳み込みをイメージするためプールに置いたトンネルを使って考える（インパルス応答のイメージ）
    - 図19-3 トンネルを通る複数の波から畳み込みをイメージする
    - 図19-4 電子回路の動きとしてイメージを膨らませる
- Ken Gentile; Application Note 922, Digital Pulse-Shaping Filter Basics, AN-922, Analog Devices
- David Skolnick and Noam Levine; Digital Signal Processing 101, Analog Dialogue, vol. 31, no. 1, 1997, pp. 3 – 6
- 石井 聡; DAC の妙技「MIX MODE」を デジタル信号処理の理論的視点から考える, TNJ-024, 回路設計Webラボ技術ノート, Analog Devices
- 石井 聡; ADC やDAC の変換動作と信号演算処理 である畳み込みや掛け算との関係を考える, TNJ-025, 回路設計Webラボ技術ノート, Analog Devices
- 松尾 博; やさしいフーリエ変換，森北出版株式会社

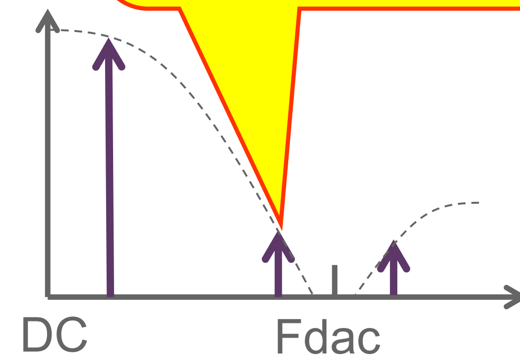
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

Appendix 1. 超高速DAC技術「MIX MODE」の信号をデモ・システムで作ってみる

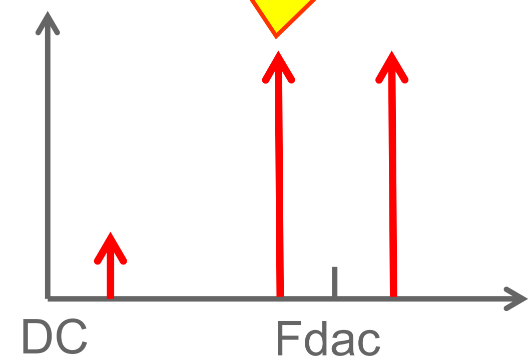
MIX MODEとは



これまでの説明のようにsinc形状によりこの成分はレベルが低減する

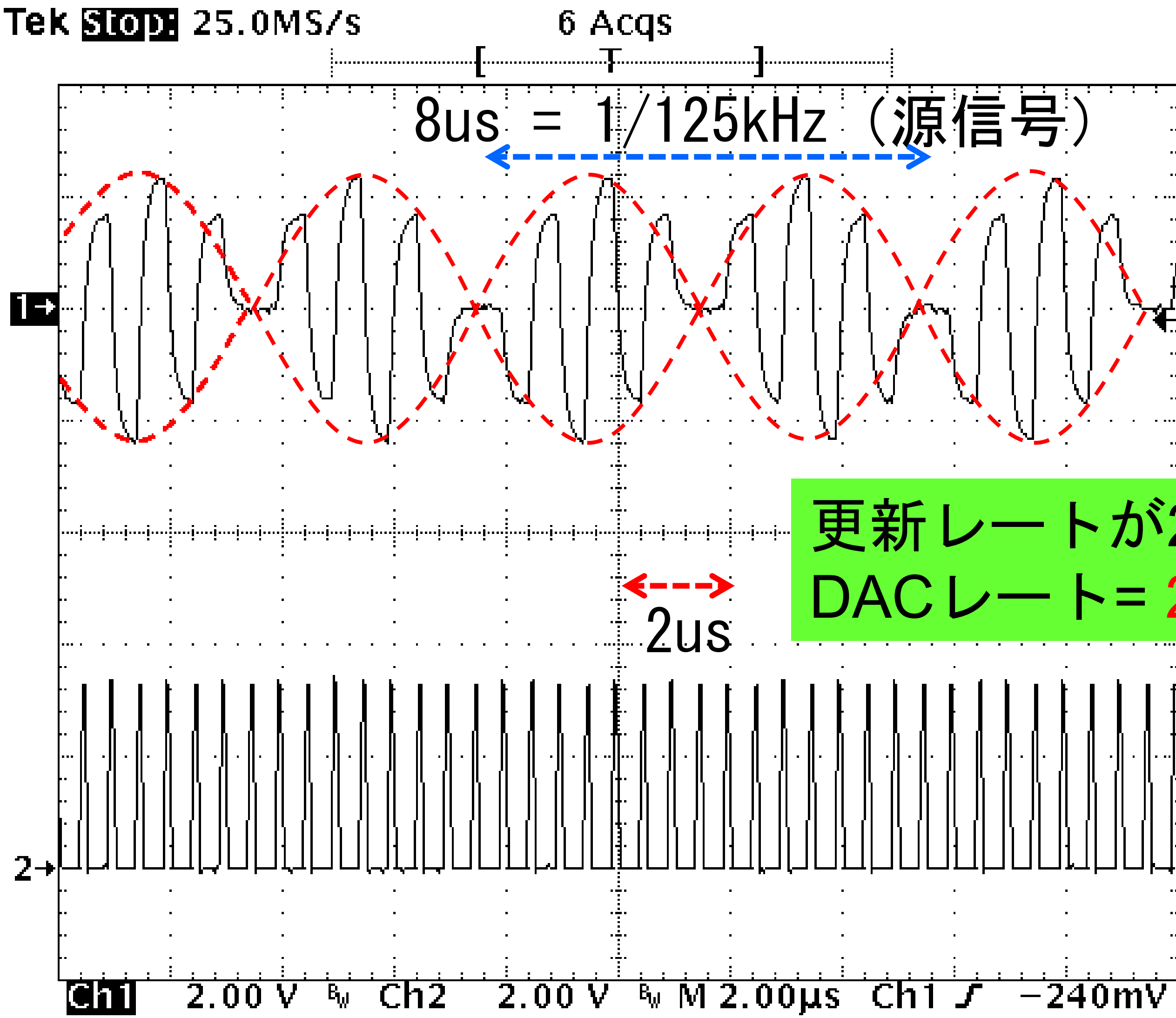


この成分のレベルがUPする



ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

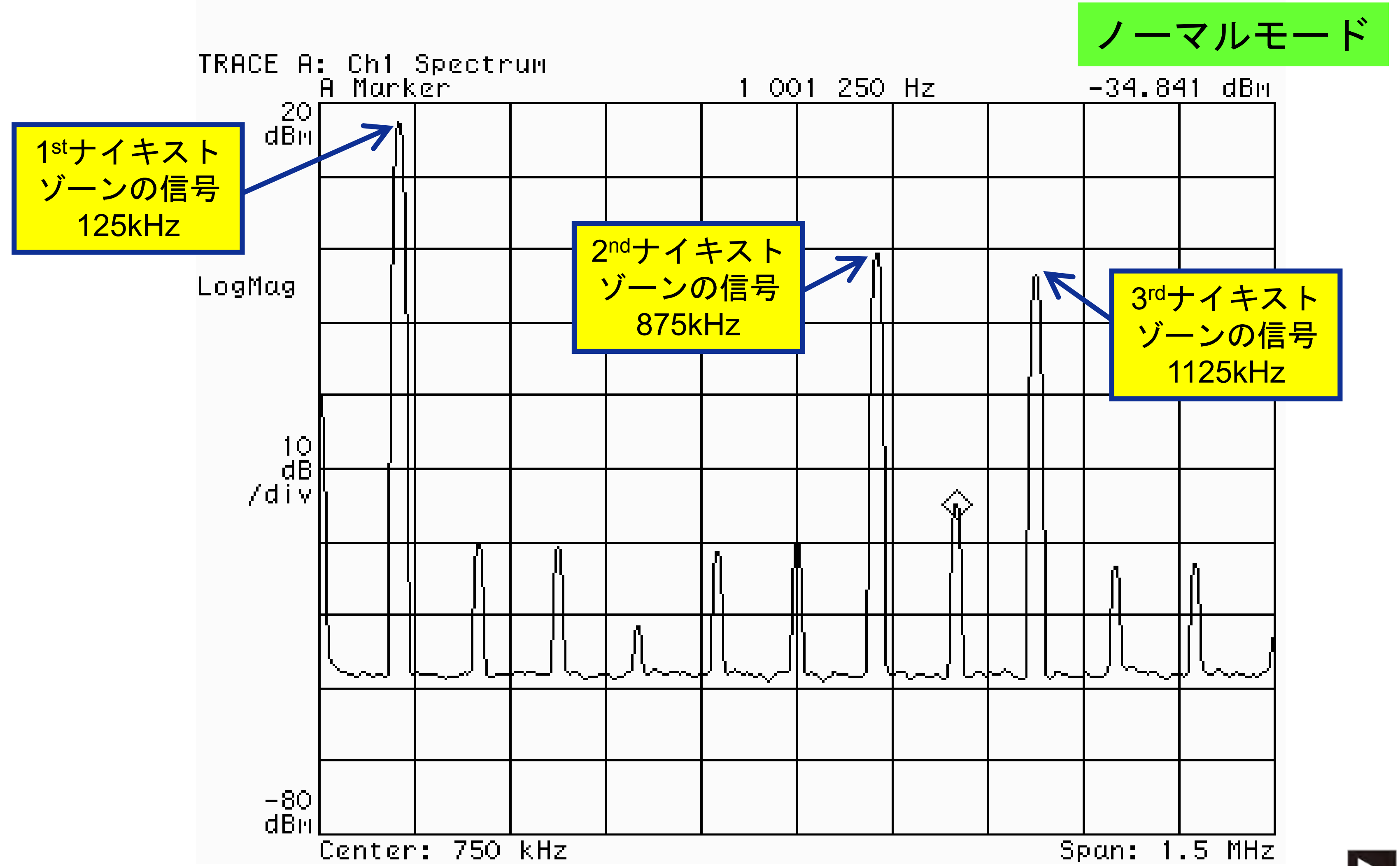
MIX MODEのアナログ信号をDAC AD5543で作ってみる（時間軸波形の観測）



更新レートが2倍になるので
DACレート= 2Mspsとなる

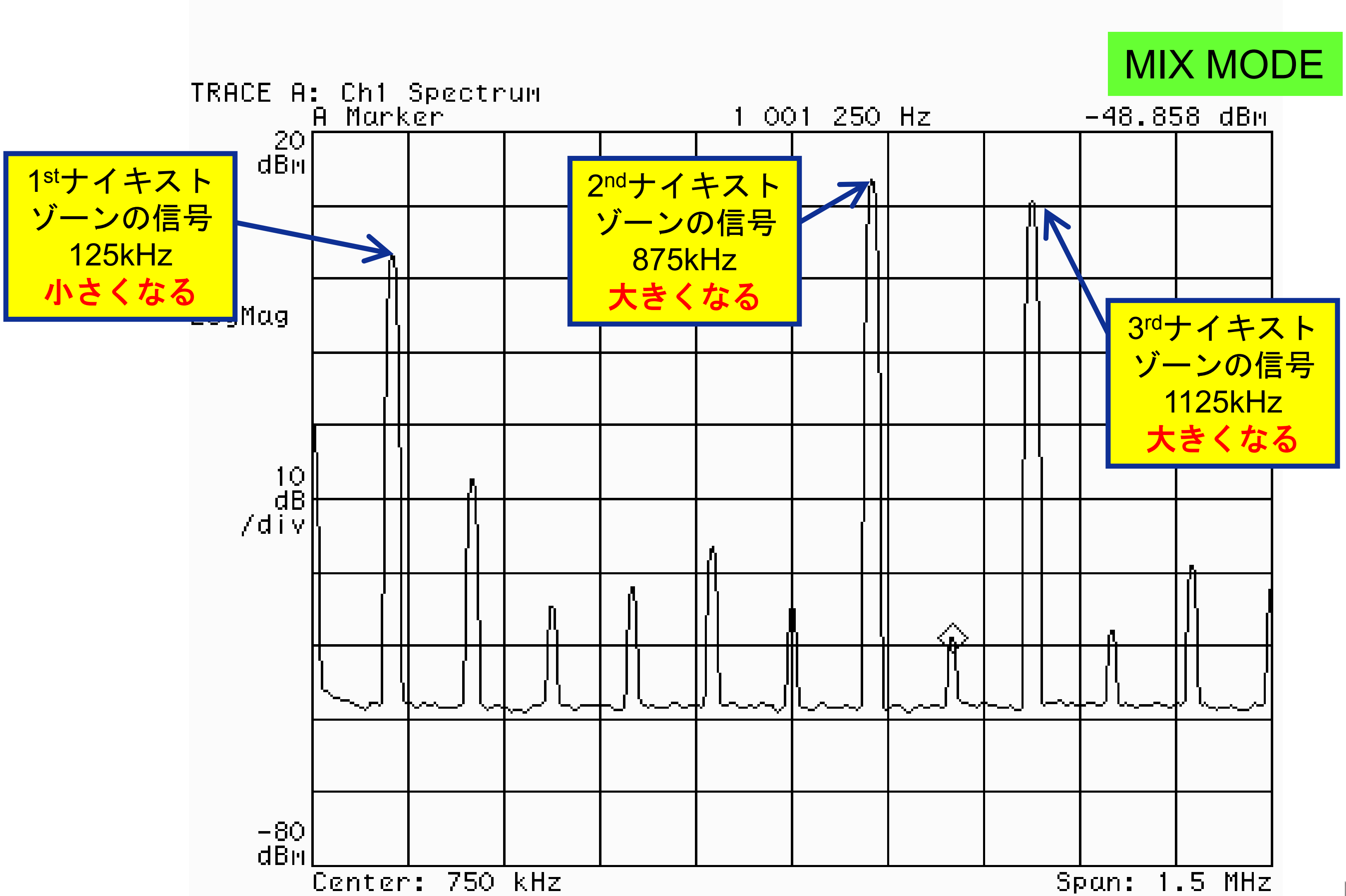
ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

MIX MODEのアナログ信号により得られるスペクトル



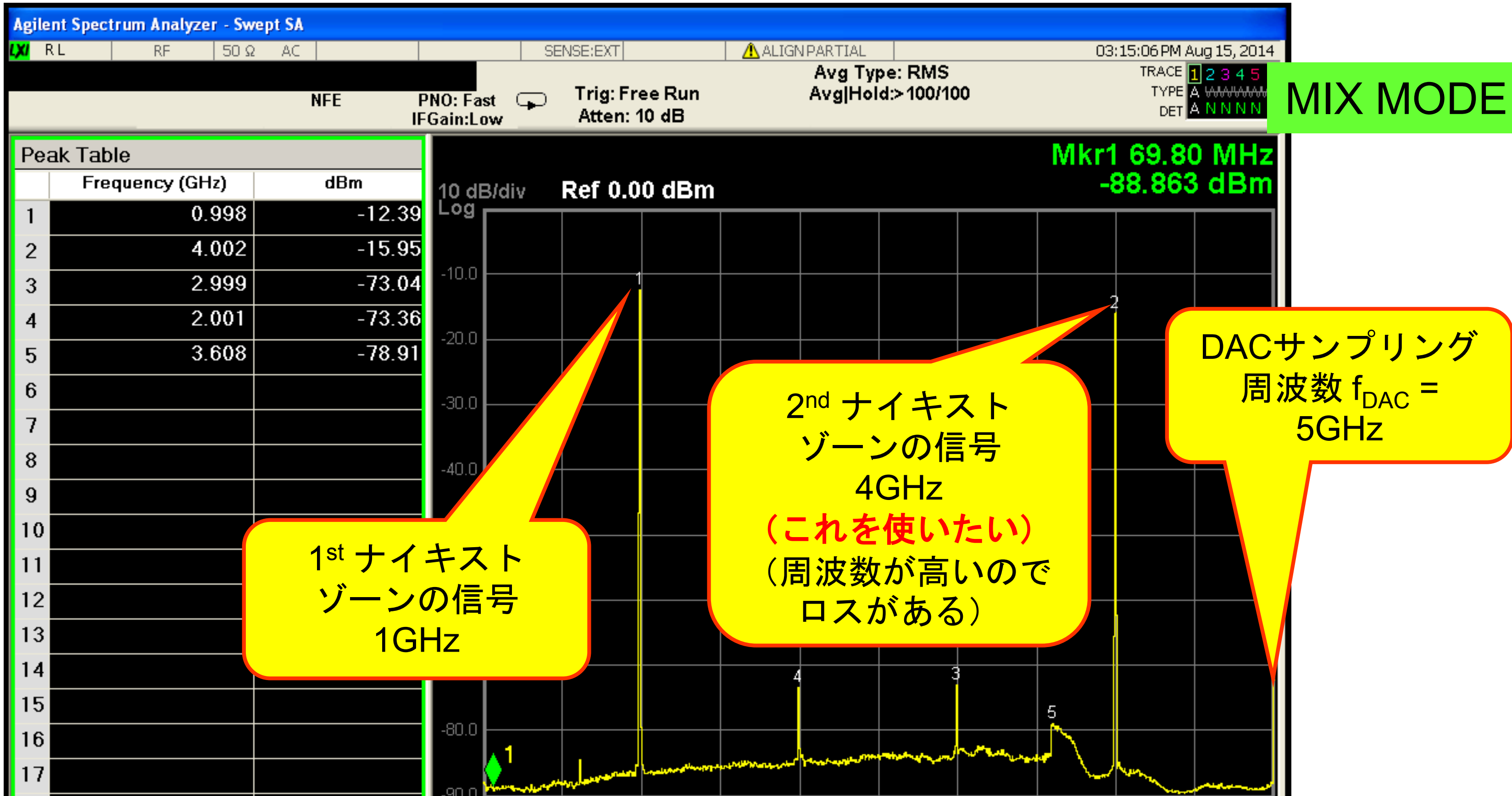
ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

MIX MODEのアナログ信号により得られるスペクトル



ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

MIX MODEの利点と活用シーン（ノーマルモードとの比較）



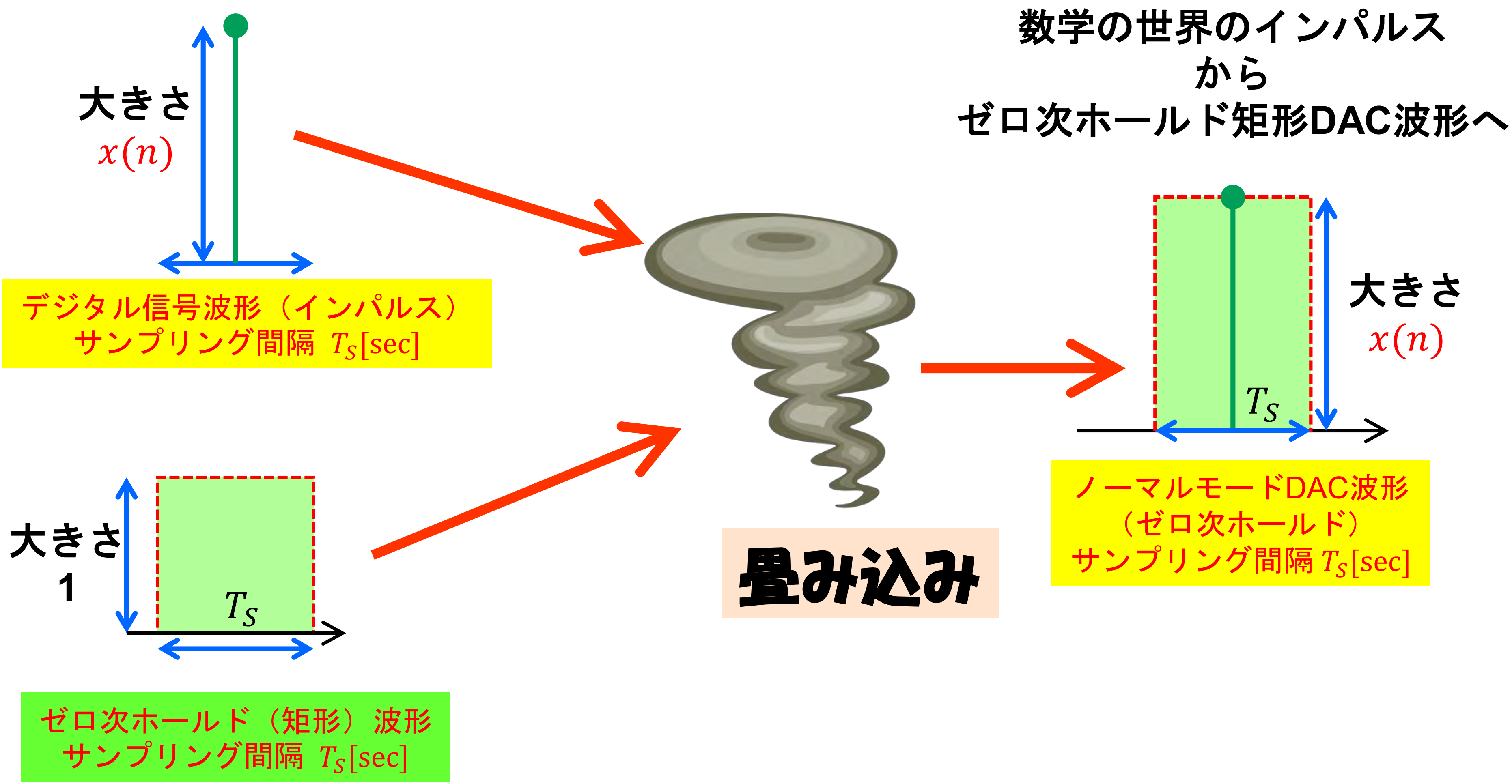
ノーマルモードと比べ1st ナイキストゾーンの信号が低減し、
2nd ナイキストゾーンの信号が大きくなる
BPFで2ndナイキストゾーンの信号を有効に取り出せる

ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

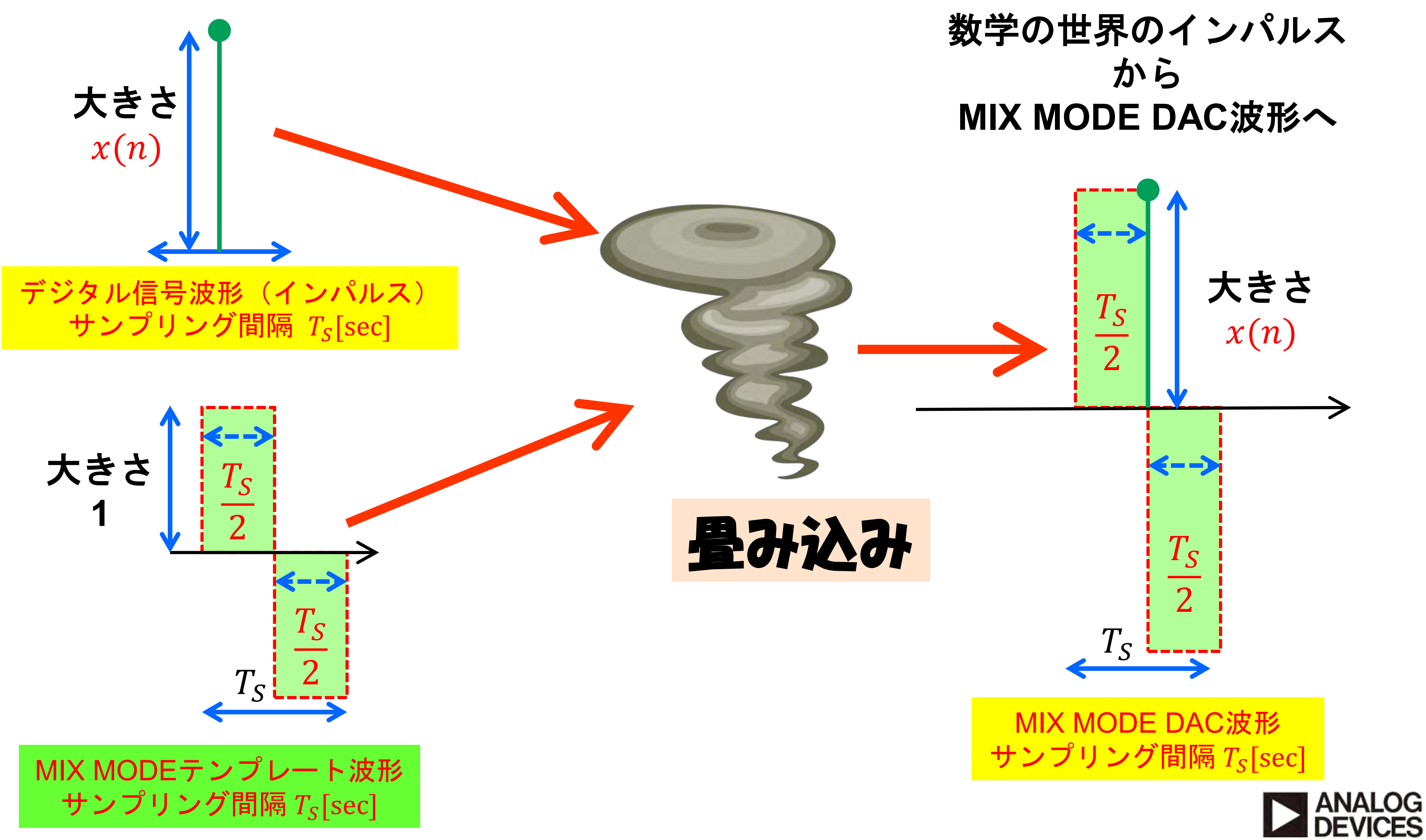
ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

Appendix 2. ノーマルモードとMIX MODEの違いを乗算と畳み込みで考える

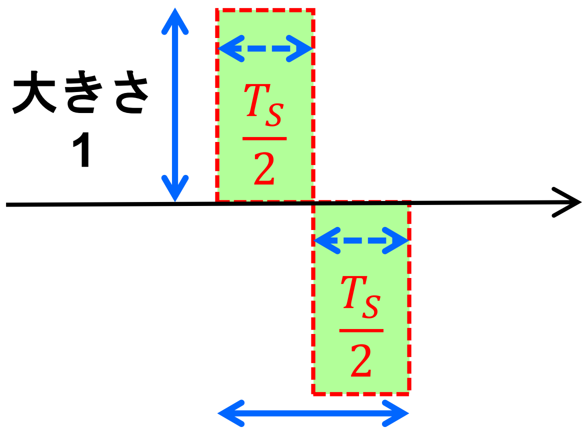
MIX MODEを理解するカギ「時間軸でのインパルスとMIX MODEテンプレート波形との畳み込み」



MIX MODEを理解するカギ「時間軸でのインパルスとMIX MODEテンプレート波形との畳み込み」



MIX MODEのテンプレート波形をフーリエ変換してみる



サンプリング間隔
$T_S[\mathrm{sec}] = 1/f_S$

時間長さが$T_S/2$の矩形波 のフーリエ変換は

$$\frac{T_S}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_S}{4}\right)$$

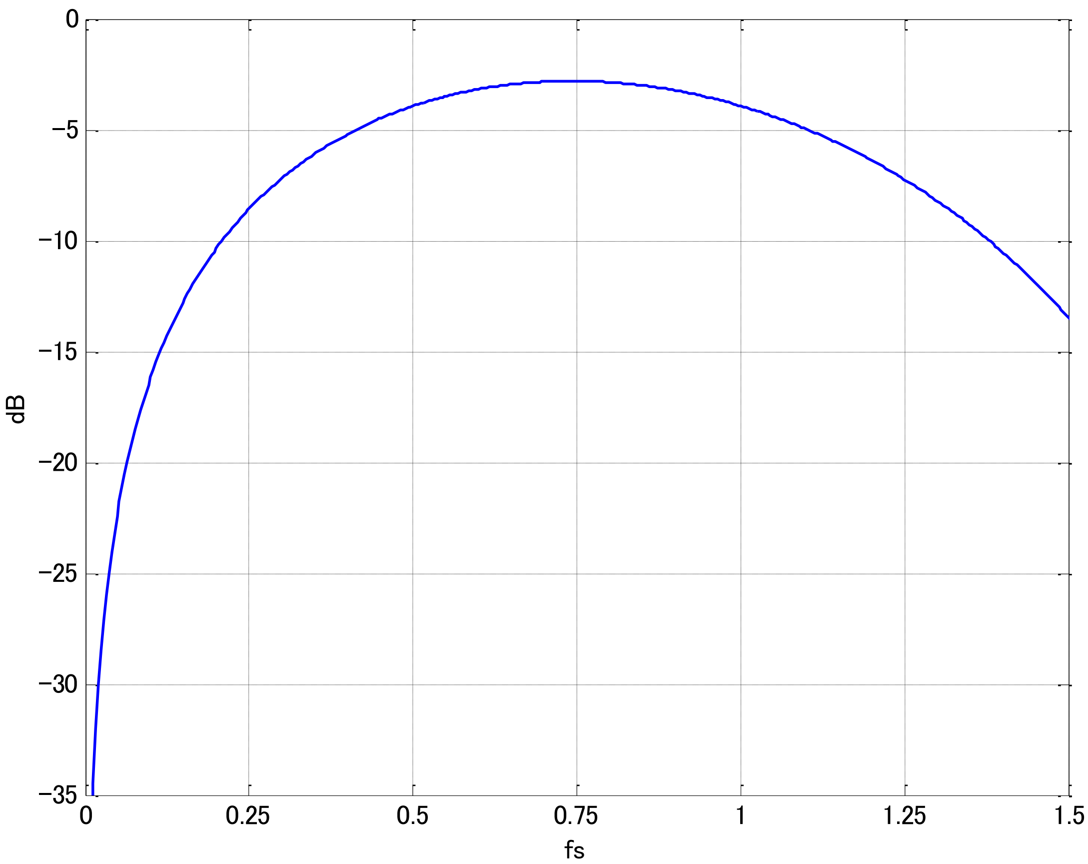
波形が$\pm T_S/2$だけ時間ズレしているので、
フーリエ変換の推移則を使うと左半分の波形は

$$\frac{T_S}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_S}{4}\right) e^{+j\omega T_S/4}$$

右半分の波形と一緒にすると

$$\frac{T_S}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_S}{4}\right)\left(e^{+j\omega T_S/4} - e^{-j\omega T_S/4}\right)$$

テンプレート波形を周波数軸でプロットしてみる



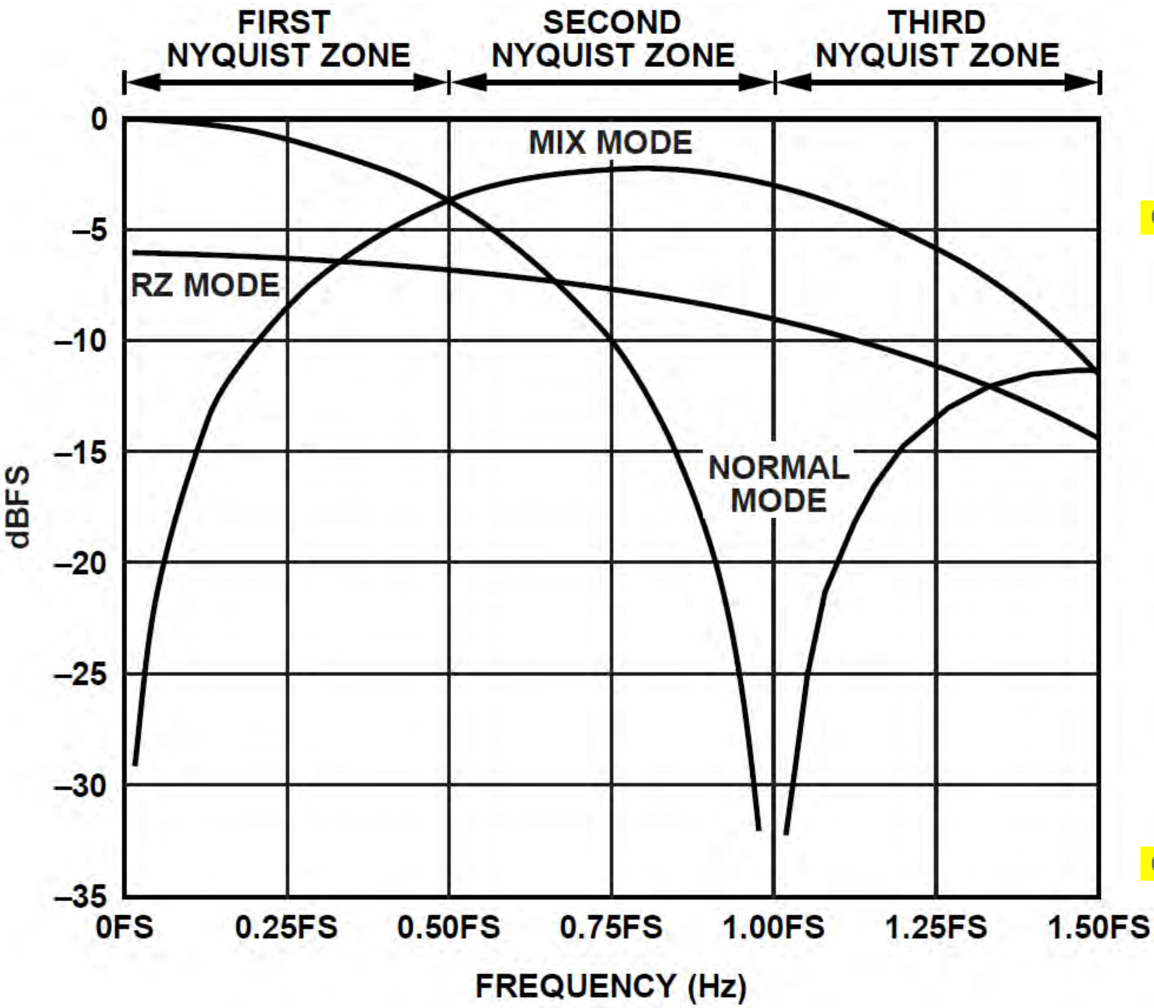
オイラーの公式から

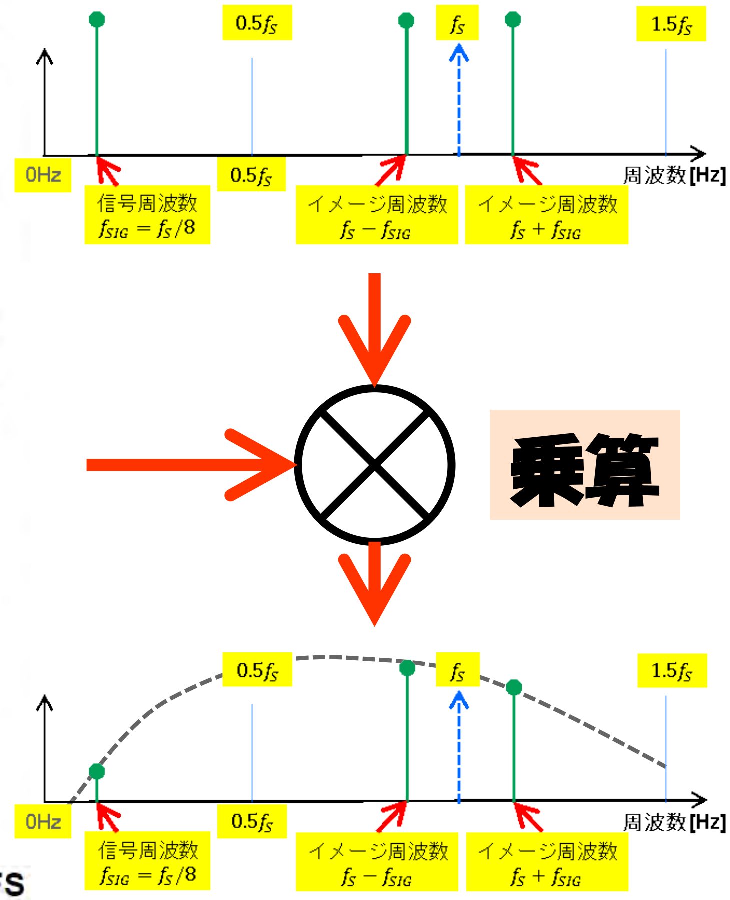
$$\frac{T_S}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_S}{4}\right)\cdot j2\sin\frac{\omega T_S}{4}$$

$T_S = 1\ (f_S = 1)$で規格化すると、振幅レベルは

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right)\cdot\sin\frac{\omega}{4}$$

計算結果とデータシートの図を比較してみる（高速DAC AD9739のデータシートより）





ANALOG DEVICES
想像を超える可能性を
AHEAD OF WHAT'S POSSIBLE™

Appendix 3. AD変換された離散信号スペクトルも畳み込みの考え方が用いられている

アナログ信号のサンプリングとデルタ関数

アナログ（連続）信号$x(t)$のサンプリング動作$x_{smp}(t)$は、デルタ関数$\delta(t)$を用いて

$$x_{smp}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(t)\,\delta(t - nT_S)$$

ただしT_Sはサンプル周期。ここでデルタ関数の性質から

$$x_{smp}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_S)$$

つまりアナログ（連続）信号$x(t)$とデルタ関数$\delta(t)$との**乗算となる。**

つづいて$x(t)$のスペクトルを$X(\omega)$とし、$\sum \delta\,(t - nT_S)$のスペクトル$D(\omega)$をフーリエ変換により

$$D(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_S) \right) e^{-j\omega t} dt$$

Σの数列中で$n = N$とき、

$$D(\omega, N) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - NT_S) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$t = NT_S$のときしか値を持たないので

$$D(\omega, N) = e^{-j\omega NT_S}$$

すべてのnで、

$$D(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-j\omega nT_S}$$

以降を厳密に計算するには、松尾博; やさしいフーリエ変換, 森北出版の3-6節を参照いただきたいが、「簡単なイメージ」で（続く）

デルタ関数の周波数軸上の表現

$\omega_0 = 2\pi/T_S$の周波数で考えてみると、Σの中は$\exp(-j2\pi n) = 1$となる。そこでω_0の$\pm m$倍のすべての周波数で、

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} D(m\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left[-j\frac{2\pi}{T_S}nT_S\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(-j2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} 1$$

これから、相当乱暴だが すべてのmで

$$D(m\omega_0) = 1$$

「だとも」イメージとして理解できる。

$\omega_0 \neq 2\pi/T_S$では、値が変化するので定数値にならないから、このようにも考えることができる。厳密には以下となる。ただし$\omega_0 = 2\pi/T_S$ 。

時間間隔T_Sのデルタ関数列
時間軸t

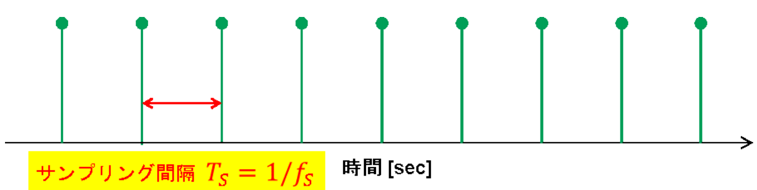
デルタ関数列は周波数間隔ω_0のスペクトル。角周波数軸ω

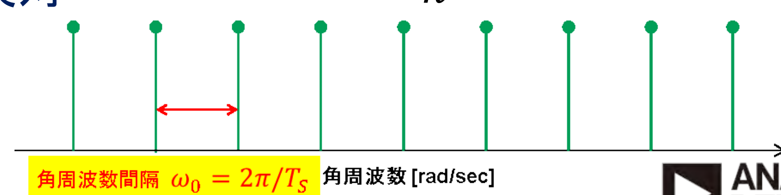
$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_S)$$

$$D(\omega) = \Im(d(t))$$

フーリエ変換対

$$D(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

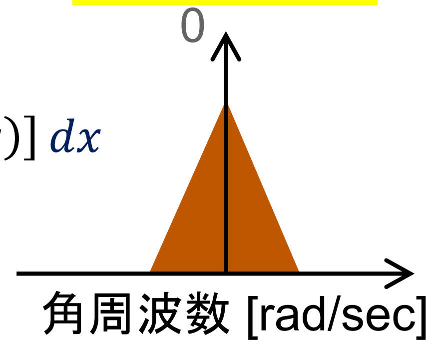




ここでも畳み込みが使われている

アナログ（連続）信号$x(t)$の周波数スペクトルを$X(\omega)$とする。サンプリングされた離散信号の周波数スペクトル$X_{smp}(\omega)$は、デルタ関数列のスペクトル$D(\omega)$との<u>**畳み込みとなる。**</u>

アナログ（連続）信号$x(t)$の周波数スペクトルを$X(\omega)$

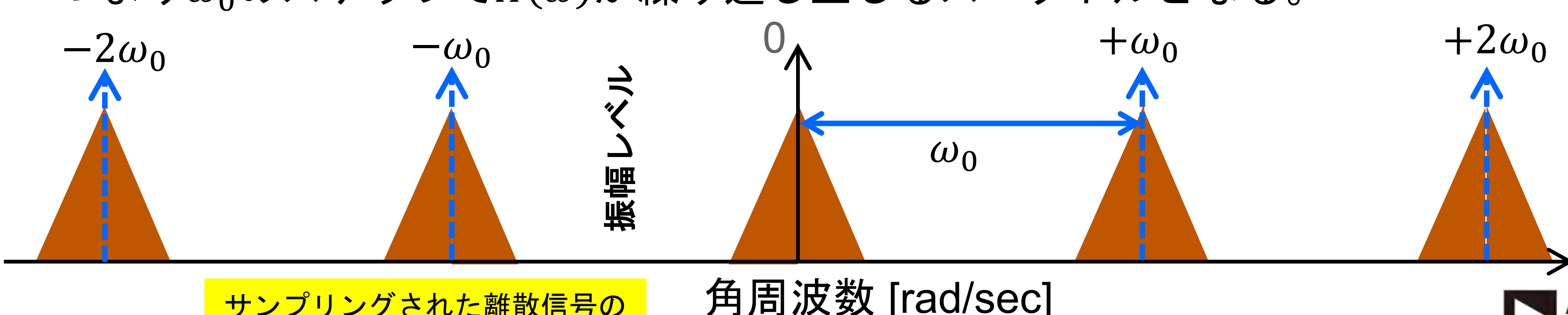


$$X_{smp}(\omega) = (D * X)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - n\omega_0) \right] \cdot [X(\omega - x)]\, dx$$

$\delta(x - n\omega_0)$は$x = n\omega_0$でのみ1なので、

$$X_{smp}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(\omega - n\omega_0)$$

つまりω_0のステップで$X(\omega)$が繰り返し生じるスペクトルとなる。



サンプリングされた離散信号の周波数スペクトル$X_{smp}(\omega)$