

# アクティブ・フィルタの位相関係

Hank Zumbahlen 著 (hank.zumbahlen@analog.com)

フィルタを使用するアプリケーションでは、一般に位相応答よりも振幅応答のほうに関心が向かいます。しかしアプリケーションによっては、むしろフィルタの位相応答のほうが重要になる場合があります。たとえば、フィルタがプロセス制御ループの要素になっている場合などがそうです。この場合、ループの安定性に影響を及ぼす可能性があるため、位相シフト全体が問題になります。また、フィルタを構築するときのトポロジーによって、特定の周波数で符号反転が生じるかどうか重要になることがあります。

アクティブ・フィルタをカスケード接続された2つのフィルタとして考えるとわかりやすくなります。1つは理想的なフィルタで、伝達方程式を実行します。もう1つはフィルタの構築に使用するアンプです。図1にこれを示します。負帰還クロズド・ループで使用するアンプは、1次応答の単純なローパス・フィルタと考えることができます。ゲインは、一定の変曲点より上の周波数でロールオフします。さらに、反転構成でアンプを使用する場合には、実際上すべての周波数で180°の位相シフトが追加されることになります。

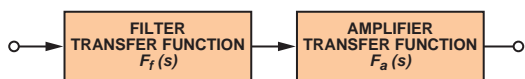


図1. 2つの伝達関数をカスケード接続したフィルタ

フィルタ設計は2段階のプロセスです。最初にフィルタ応答を選択し、次にこれを実現するための回路トポロジーを選択します。フィルタ応答は減衰曲線の形状になります。多くの場合、バターワース、ベッセル、チェビシェフ型など古典的な応答のいずれかになります。これらの応答曲線を選ぶことで振幅応答が変化しますが、同時に位相応答の形状にも作用します。ここでは比較のために振幅応答を無視し、基本的に一定と考えることにしましょう。

フィルタの複雑さは、一般にフィルタの「次数」によって定義されます。これは、エネルギーを蓄積する素子（インダクタやコンデンサ）がいくつあるかに関係しています。フィルタの伝達関数の分母の次数は、周波数の増加に伴う減衰率を定義します。漸近フィルタのロールオフ率は $-6n$  dB/オクターブまたは $-20n$  dB/デケードです（ $n$ は極数）。オクターブは周波数の2倍または2分の1を表し、デケードは周波数の10倍または10分の1を表します。したがって、1次（すなわち単極）フィルタのロールオフ率は $-6$  dB/オクターブまたは $-20$  dB/デケードとなります。同様に、2次（すなわち2極）フィルタのロールオフ率は、 $-12$  dB/オクターブまたは $-40$  dB/デケードとなります。高次のフィルタは通常、1次と2次のブロックをカスケード接続して構築します。もちろん、単一のアクティブ段で3次や4次のブロックさえ構築できますが、素子の値に対する感度や部品間の相互作用による周波数応答への影響が大幅に増加するため、こうした方法にはあまりメリットがありません。

## 伝達方程式

まず、伝達方程式の位相応答を考えてみましょう。伝達関数の位相シフトは、同じ次数のすべてのフィルタについて同一です。

単極でローパスの場合、伝達関数の位相シフト $\phi$ は次式で求めることができます。

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (1)$$

ここで、  
 $\omega$  = 周波数 (ラジアン/秒)  
 $\omega_0$  = 中心周波数 (ラジアン/秒)

360°のサイクルで $2\pi$ ラジアンになるため、ラジアン/秒の周波数

は $\text{Hz}(f)$ の周波数の $2\pi$ 倍に等しくなります。式は無次元の比率であるため、 $f$ でも $\omega$ でも使用できます。

中心周波数は、「カットオフ周波数」（単極ローパス・フィルタの振幅応答が3dB、すなわち約30%まで低下するときの周波数）ともいいます。位相については、中心周波数は位相シフトが $-90^\circ$ の極値（この例の場合）の50%になるときのポイントになります。図2の片対数グラフでは、中心周波数の2デケード下から2デケード上までについての式1の値を示しています。中心周波数（=1）の位相シフトは $-45^\circ$ です。

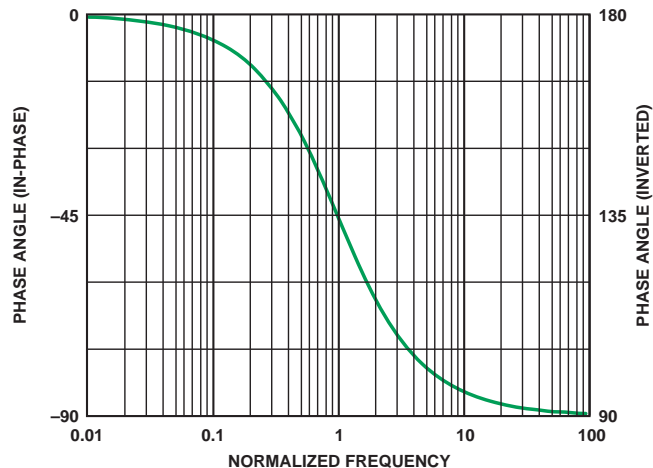


図2. 単極ローパス・フィルタの中心周波数周辺における位相応答（左軸が同相応答、右軸が反転応答）

同様に、単極ハイパス・フィルタの位相応答は次式で求めることができます。

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (2)$$

図3は、中心周波数の2デケード下から2デケード上までについての式2の値を示しています。正規化中心周波数（=1）の位相シフトは $+45^\circ$ です。

ハイパスとローパスの位相応答はほぼ同じですが、 $90^\circ$  ( $\pi/2$ ラジアン) だけシフトしていることがわかります。

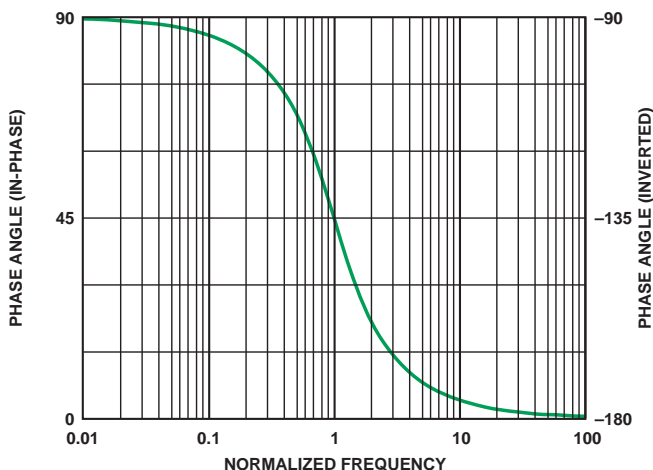


図3. 中心周波数が1の単極ハイパス・フィルタの位相応答（左軸が同相応答、右軸が反転応答）

2次でローパスの場合、伝達関数の位相シフトは次式で近似できます。

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] - \tan^{-1} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_0} - \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] \quad (3)$$

ここで、 $\alpha$ はフィルタの減衰比です。 $\alpha$ によって振幅応答のピーキングと位相遷移の鋭さが決まります。 $\alpha$ は回路の $Q$ の逆数であり、これによって振幅のロールオフの急峻度や位相シフトも決まります。バターワースの $\alpha$ は1.414 (0.707の $Q$ )であり、最大限に平坦な応答になります。 $\alpha$ の値がこれより小さくなると、振幅応答のピーキングが生じます。

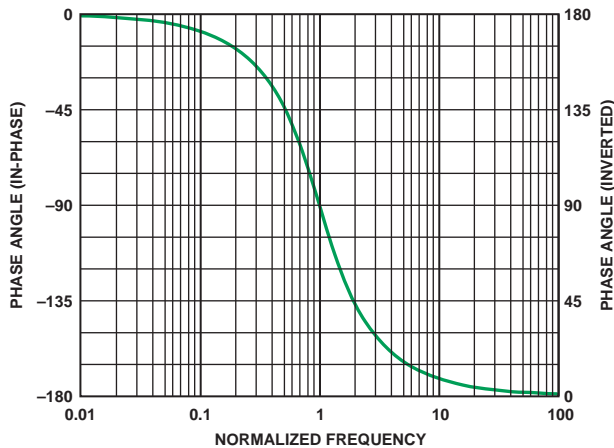


図4. 中心周波数が1の2極ローパス・フィルタの位相応答 (左軸が同相応答、右軸が反転応答)

図4は、中心周波数の2ディケード下から2ディケード上までのこの式の値を示しています ( $\alpha = 1.414$ の場合)。ここで、中心周波数 (=1) の位相シフトは $-90^\circ$ です。

2極ハイパス・フィルタの位相応答は次式で近似できます。

$$\phi(\omega) = \pi - \tan^{-1} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] + \tan^{-1} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( 2 \frac{\omega}{\omega_0} - \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] \quad (4)$$

図5は、中心周波数 (=1) の2ディケード下から2ディケード上までのこの式の値を示しています (ここでも $\alpha = 1.414$ )。ここで、中心周波数 (=1) の位相シフトは $-90^\circ$ です。

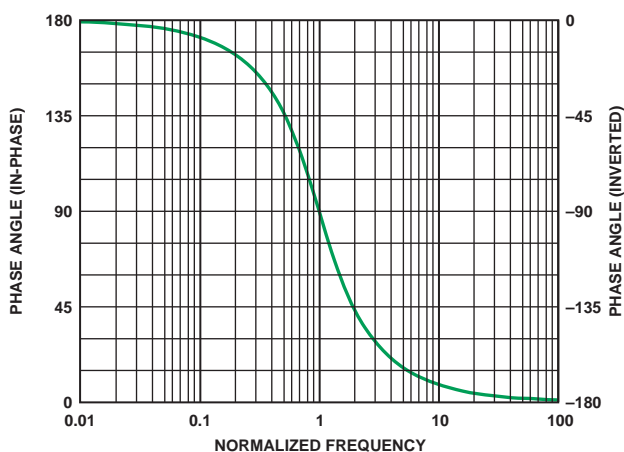


図5. 中心周波数が1の2極ハイパス・フィルタの位相応答 (左軸が同相応答、右軸が反転応答)

ここでもハイパスとローパスの位相応答はほぼ同じですが、 $180^\circ$  ( $\pi$ ラジアン) だけシフトしていることがわかります。

高次フィルタでは、追加される各部の位相応答は累積的であり、全体に加算されます。詳細については後述します。一般的な方法に従って、表示した位相シフトは $\pm 180^\circ$ の範囲までとしています。たとえば、 $-181^\circ$ は実際上 $+179^\circ$ と同じであり、 $360^\circ$ は $0^\circ$ と同じです。

### 1次フィルタ・セクション

1次セクションは、さまざまな方法で構築できます。最も簡単な方法は、図6に示すようにパッシブRC構成を使用するものです。このフィルタの中心周波数は $1/(2\pi RC)$ です。通常、このフィルタの後には非反転バッファ・アンプが置かれ、フィルタに続く回路での負荷でフィルタ応答が変化しないようにします。さらに、バッファは多少の駆動能力を提供できます。この位相は、図2に示すように周波数により変化し、中心周波数で $45^\circ$ の位相シフトがあります。位相シフトを変更する部品が他にないため、伝達方程式で予測したとおりの値になります。この応答は「同相/1次/ローパス応答」と呼ばれます。バッファは、その帯域幅がフィルタの帯域幅を大きく上回っている限り、位相シフトを増加させることはありません。

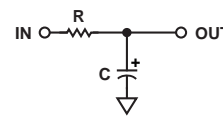


図6. パッシブ・ローパス・フィルタ

これらのグラフの周波数は正規化されており、中心周波数に対する比になっています。たとえば、中心周波数が5kHzの場合、グラフは50Hz ~ 500kHzの周波数に対する位相応答になります。

別の構造を図7に示します。並列に抵抗を配置し、積分コンデンサを絶えず放電するこの回路は、基本的に有損失積分器です。ここでも中心周波数は $1/(2\pi RC)$ です。反転モードでアンプを使用するため、この反転で $180^\circ$ の位相シフトが加えられます。図2 (右軸) に、アンプの位相反転を含め、周波数に伴う入出力間の位相変化が示されています。この応答は「反転/1次/ローパス応答」と呼ばれます。

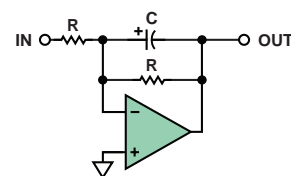


図7. 反転モードでオペアンプを使用するアクティブ単極ローパス・フィルタ

上記の回路は、高周波が減衰し、低周波が通過するローパス・フィルタです。よく似た回路ですが、高周波が通過する回路もあります。1次パッシブ・ハイパス・フィルタの構成を図8に示します。正規化周波数に対する位相変化は、図3に示されています (同相応答)。

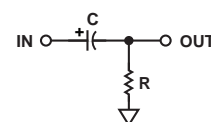


図8. パッシブ・ハイパス・フィルタ

図3のグラフ(左軸)は「同相/1次/ハイパス応答」と呼ばれます。ハイパス・フィルタのアクティブ構成を図9に示します。周波数に対する位相変化は図3に示されています(右軸)。これは「反転/1次/ハイパス応答」と呼ばれます。

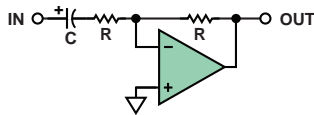


図9. アクティブ単極ハイパス・フィルタ

## 2次セクション

2次セクションの構築には、さまざまな回路トポロジーがあります。ここではサレンキー、多重帰還、状態変数、またこれに似たバイカットについて説明します。これらは最も一般的で、適切なものです。さまざまなトポロジーの詳細については、参考文献を参照してください。

## サレンキーのローパス・フィルタ

広く使用されているサレンキーは電圧制御型電圧源(VCVS)とも言われるもので、1955年にMITリンカーン研究所のR.P.SallenとE.L.Keyによって初めて発表されました(参考文献3を参照)。図10はサレンキー、2次、ローパス・フィルタの回路図です。この構成に人気がある理由の1つは、オペアンプを主にバッファとして使用するため、基本的に性能がオペアンプの性能に左右されないことによります。サレンキーの基本回路では、フォロア接続されたオペアンプを電圧ゲインに使用しないため、ゲイン帯域幅の条件はそれほど重要ではありません。つまり、可変帰還ループでアンプのダイナミクスが関係してくる他のトポロジーと比較すると、この固定(ユニティ)ゲインを使用することによって、任意のオペアンプの帯域幅で高い周波数のフィルタを設計できるようになります。信号の位相はフィルタ(非反転構成)全体で一定です。 $Q=0.707$ (すなわち減衰比、 $\alpha=1.414$ の $1/Q$ —バターワース応答)のサレンキー・ローパス・フィルタの周波数対位相シフトのグラフを図4(左軸)に示します。比較を単純化するために、これをここで論じる2次セクションの標準性能とします。

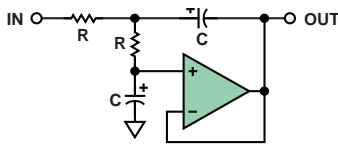


図10. 2極サレンキーのローパス・フィルタ

## サレンキーのハイパス・フィルタ

サレンキーのローパスをハイパス構成に変換するには、図11に示すように再びユニティ・ゲインのバッファを使用し、周波数決定ネットワークのコンデンサと抵抗を入れ換えます。周波数対位相シフトは図5に示します(左軸)。これが「同相/2次/ハイパス応答」です。

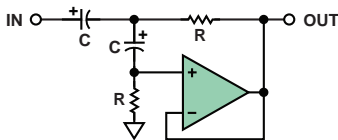


図11. 2極サレンキーのハイパス・フィルタ

サレンキー・フィルタのアンプ・ゲインは、帰還経路の抵抗減衰器をオペアンプの反転入力に接続することによって増大させることができます。ただし、ゲインの変更は周波数を決定する回路の方程式に影響を及ぼすため、部品の値を計算し直さなければなりません。また、閉回路にゲインが導入されるため、アンプのダイナミクスを厳密に調べる必要があるでしょう。

## 多重帰還 (MFB) ローパス・フィルタ

多重帰還フィルタは、帰還ループ内の積分器(反転構成)にオペアンプを利用するシングル・アンプ構成です(図12を参照)。したがって、サレンキーの場合よりも伝達関数のオペアンプ・パラメータへの依存性が強くなります。高周波におけるオペアンプのオープン・ループ・ゲインが限られているため、高 $Q$ で高周波のブロックを生成することが難しくなります。目安としては、オペアンプのオープン・ループ・ゲインを共振(すなわちカットオフ)周波数における振幅応答よりも少なくとも20dB(すなわち $\times 10$ )大きくする必要があります。これにはフィルタの $Q$ によって生じるピーキングも含まれます。 $Q$ によるピーキングの振幅の大きさは次のようになります。

$$A_0 = HQ \quad (5)$$

ここで、 $H$ は回路のゲインです。

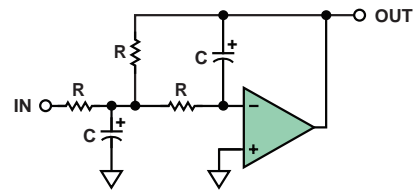


図12. 2極多重帰還(MFB)ローパス・フィルタ

多重帰還フィルタは信号の位相を反転します。これはフィルタ自体の位相シフトに $180^\circ$ を追加することと同じです。周波数に対する位相の変化は図4に示されています(右軸)。これは「反転/2次/ローパス応答」と呼ばれます。興味深いのは、所定の応答を実現するための部品の最大値と最小値の差が、サレンキーの場合よりも多重帰還のほうが大きくなることです。

## 多重帰還 (MFB) ハイパス・フィルタ

多重帰還ローパスの場合の説明がハイパスの場合にも当てはまります。多重帰還ハイパス・フィルタの回路図を図13に示します。図5に理想的な周波数対位相シフトを示します(右軸)。これは「反転/2次/ハイパス応答」と呼ばれます。

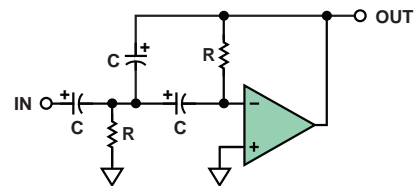


図13. 2極多重帰還(MFB)ハイパス・フィルタ

このタイプのフィルタでは、高周波数での安定した実装が難しくなることがあります。これは微分回路を利用しているためで、どの微分回路でもそうですが、高周波数でクローズドループ・ゲインが大きくなり、ノイズを増幅する傾向があります。

## 状態変数

状態変数フィルタを図14に示します。この構成は3つのオペアンプを含め、多くの回路素子を利用することになりますが、一番柔軟で精密な実装になります。3つの主要パラメータ（ゲイン、 $Q$ 、 $\omega_0$ ）をいずれも個別に調整でき、またローパス、ハイパス、バンドパスの各出力を同時に利用することができます。フィルタのゲインだけを調整することもできます。

状態変数フィルタではすべてのパラメータを個々に調整できるため、部品の広がり最小になります。また、温度や部品の許容誤差によるミスマッチも抑えることができます。積分器に使用されるオペアンプには、オペアンプのゲイン帯域幅について多重帰還について説明したのと同じ制限があります。

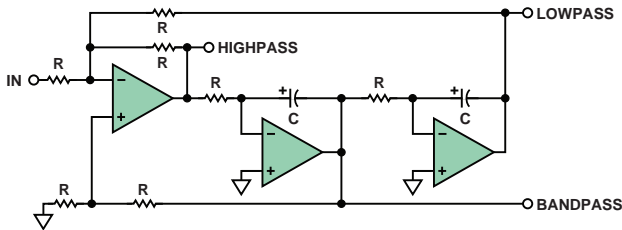


図14. 2極,状態変数フィルタ

ローパス部の周波数対位相シフトは、反転2次応答です（図4の右軸を参照）。ハイパス部は、反転ハイパス応答になります（図5の右軸を参照）。

## 双2次（バイカッド）

状態変数フィルタによく似たものがバイカッドです（図15を参照）。この回路の名称は、最初は1968年にJ.Towが使用し（参考文献6を参照）、その後1971年にL.C.Thomas（参考文献5を参照）が使用しました。これは、伝達関数が2つの2次項の比になることに由来しています。回路は状態変数回路とはやや異なります。この構成では、独立したハイパス出力を使用することはできませんが、1つは同相（LOWPASS1）、もう1つは逆相（LOWPASS2）の2つのローパス出力があります。

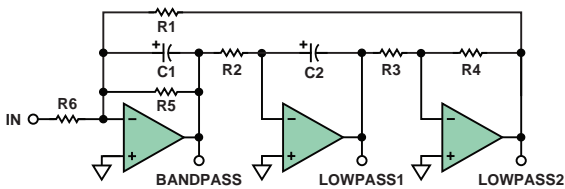


図15. 標準バイカッド2極セクション

4番目のアンプ部を追加することによって、ハイパス、ノッチ（ローパス、標準、ハイパス）、そしてオールパス・フィルタを実現することができます。ハイパス部のあるバイカッド・フィルタの回路図を図16に示します。

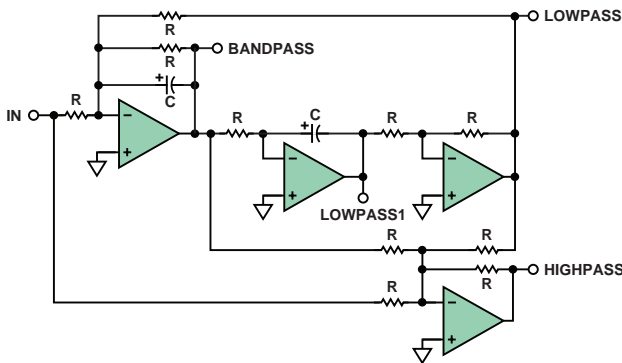


図16. 2極バイカッド・フィルタ（ハイパス部を含む）

LOWPASS1セッションの周波数対位相シフトは、同相、2次、ローパス応答です（図4の左軸を参照）。LOWPASSセッションは、反転2次応答になります（図4の右軸を参照）。HIGHPASSセッションには、反転する位相シフトがあります（図5の右軸を参照）。

## 結論

フィルタを構築する際のトポロジーが、実際の位相応答に影響を及ぼすことがわかりました。これが、どのトポロジーを使用するか決めるときに検討するポイントの1つになるかもしれません。表1に、ここに述べたさまざまなローパス・フィルタのトポロジーに対する位相の範囲を比較して示します。

表1. ローパス・フィルタ・トポロジーの位相シフト範囲

ローパス・フィルタ		
フィルタ・トポロジー	単相	位相変化
単極、パッシブ	同相	0 ~ -90°
単極、アクティブ	反転	180 ~ 90°
2極、サレンキー	同相	0 ~ -180°
2極、多重帰還	反転	180 ~ 0°
2極、状態変数	反転	180 ~ 0°
2極、バイカッド・ローパス1	同相	0 ~ -180°
2極、バイカッド・ローパス2	反転	180 ~ 0°

同様に、表2はさまざまなハイパス・トポロジーの比較です。

表2. ハイパス・フィルタ・トポロジーの位相シフト範囲

ハイパス・フィルタ		
フィルタ・トポロジー	単相	位相変化
単極、パッシブ	同相	90 ~ 0°
単極、アクティブ	反転	-90 ~ -180°
2極、サレンキー	同相	180 ~ 0°
2極、多重帰還	反転	0 ~ -180°
2極、状態変数	反転	0 ~ -180°
2極、バイカッド	反転	0 ~ -180°

## Qによる位相シフトの変化

上記の2次応答はすべて0.707の $Q$ を使用しています。図17は、 $Q$ が変化したときのローパス・フィルタの位相応答に及ぼす影響を示しています（ハイパスの結果も同じ）。 $Q=0.1, 0.5, 0.707, 1, 2, 5, 10, 20$ の値に対する位相応答がプロットされています。 $Q$ の値が低いとき、カットオフ周波数のかなり下から位相の変化が始まる点があるという点は注目に値します。

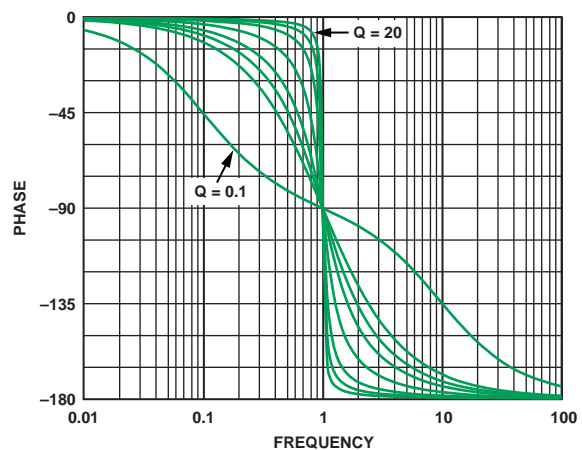


図17. Qが変化したときの位相シフトの変化

本題の対象ではありませんが、 $Q$ による振幅応答の変化も重要になることがあります。図18は、 $Q$ が範囲以上に变化した場合の2次セクションの振幅応答を示しています。

高 $Q$ セクションで生じるピーキングは、高 $Q$ セクションを多段フィルタで使用するとき問題となる場合があります。理論上はどのような順序でこれらの部分をカスケード接続しても違いはないのですが、実際は高 $Q$ セクションの前に低 $Q$ セクションを置くほうがよいとされています。こうすることで、ピーキングによってフィルタのダイナミック・レンジを超えることがなくなります。このグラフはローパス部のものですが、ハイパス応答でも同様のピーキングを示します。

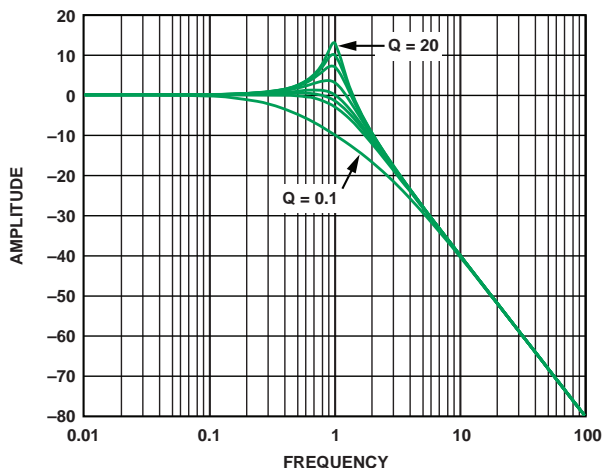


図18.  $Q$ が変化したときの2極フィルタの振幅ピーキング

### 高次フィルタ

伝達関数をカスケード接続することによって、高次の応答を形成することができます。フィルタ応答をカスケード接続すると、任意の周波数でdBゲイン（および減衰）が追加され、位相角が追加されます。前述したように、一般に多極フィルタはカスケード接続した2次セクションに、奇数次フィルタのための特別な1次セクションを加えて構築します。2つのカスケード接続した1次セクションでは、単一の2次セクションの場合のような広範囲の $Q$ はありません。

伝達関数の4次フィルタのカスケード接続を図19に示します。ここでは、フィルタが2つの2次セクションで構成されています。

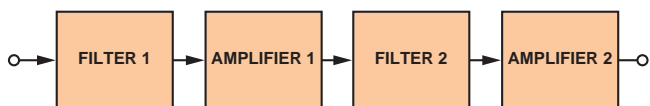


図19. 4極フィルタ用にカスケード接続された伝達関数

図20は、3種類の方法で4次フィルタを構築する場合の位相応答への影響を示しています。最初の方法は、2つのサレンキー（SK）バターワース・セクションによって構築する方法です。2番目は、2つの多重帰還（MFB）バターワース・セクションで構築する方法です。3番目は、1つのSKセクションと1つのMFBセクションで構築する方法です。ただし、2つのカスケード接続された1次セクションが2次セクションにならないのと同じように、2つのカスケード接続された2次バターワース・セクションは4次バターワース・セクションと同じものにはなりません。バターワース・フィルタの最初の部分の $f_0$ は1で、 $Q$ は0.5412です（ $\alpha = 1.8477$ ）。2番目の部分では $f_0$ が1、 $Q$ は1.3065です（ $\alpha = 0.7654$ ）。

前述したように、SKセクションは非反転ですが、MFBセクシ

ョンは反転します。図20では、これら3種類の4次セクションの位相シフトを比較しています。2つの反転する部分が同相応答を生み出すため（ $-1 \times -1 = +1$ ）、SKフィルタとMFBフィルタは同じ応答になります。混合トポロジーで構築されたフィルタ（SKとMFB）には、 $180^\circ$ シフトした応答が生じます（ $+1 \times -1 = -1$ ）。

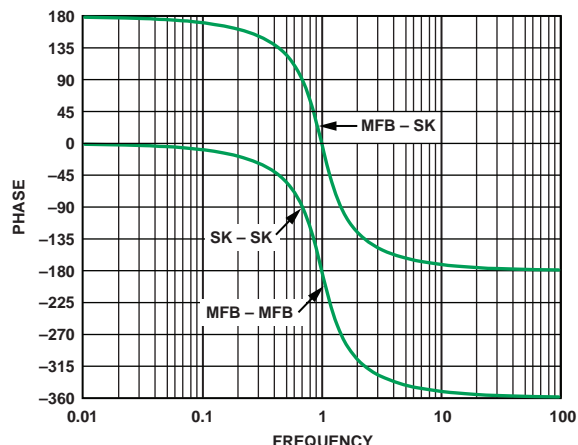


図20. さまざまなトポロジーによる4次位相応答

全体の位相シフトは、予測されるとおり、2次セクションの2倍（ $180^\circ$ 対 $360^\circ$ ）になります。ハイパス・フィルタも同様の位相応答になりますが、 $180^\circ$ シフトされています。

このカスケード接続の考え方は高次フィルタにも適用できますが、実際には8次を超えると組立てが難しくなります。

今後の記事では、バンドパス・フィルタ、ノッチパス・フィルタ（バンド除去）、オールパス・フィルタの位相関係を考察する予定です。

### 参考文献

1. Daryanani, G. 『Principles of Active Network Synthesis and Design』 J. Wiley & Sons、1976年。ISBN: 0-471-19545-6
2. Graeme, J., G. Tobey, L. Huelsman 『Operational Amplifiers Design and Applications』 McGraw-Hill、1971年。ISBN 07-064917-0
3. Sallen, R.P., E.L.Key 『A Practical Method of Designing RC Active Filters』 IRE Trans. Circuit Theory、1955年、Vol. CT-2、74 ~ 85ページ
4. Thomas, L.C. 『The Biquad: Part II—A Multipurpose Active Filtering System』 IEEE Trans. Circuits and Systems、1971年、Vol. CAS-18、358 ~ 361ページ
5. Thomas, L.C. 『The Biquad: Part I—Some Practical Design Considerations』 IEEE Trans. Circuits and Systems、1971年、Vol. CAS-18、350 ~ 357ページ
6. Tow, J. 『Active RC Filters—A State-Space Realization』 Proc. IEEE、1968年、Vol. 56、1137 ~ 1139ページ
7. Van Valkenburg, M.E. 『Analog Filter Design』 Holt, Rinehart & Winston、1982年
8. Williams, A.B. 『Electronic Filter Design Handbook』 McGraw-Hill、1981年
9. Zumbahlen, H. 『Analog Filters』、Jung, W. 『Op Amp Applications Handbook』の第5章、Newnes-Elsevier（2006年）（ADI Seminar Notesに掲載されている元の章はオンラインで入手可能）
10. Zumbahlen, H. 『Basic Linear Design』 第8章、Analog Devices, Inc、2006年