

揭开一个公式($SNR = 6.02N + 1.76dB$)的神秘面纱, 以及为什么我们要予以关注

作者: Walt Kester

简介

接触ADC或DAC时您一定会碰到这个经常被引用的公式, 用于计算转换器理论信噪比(SNR)。与其盲目地相信表象, 不如从根本上了解其来源, 因为该公式蕴含着一些微妙之处, 如果不深入探究, 可能导致对数据手册技术规格和转换器性能的误解。记住, 该公式代表的是完美N位ADC的理论性能。您可以比较ADC的实际SNR与理论SNR, 看看二者有何异同。

本教程首先推导N位模数转换器(ADC)的理论量化噪声, 知道均方根量化噪声电压后, 就可以计算理论信噪比(SNR)。此外还会分析过采样对SNR的影响。

量化噪声模型

理想转换器对信号进行数字化时, 最大误差为 $\pm\frac{1}{2}$ LSB, 如图1的一个理想N位ADC的传递函数所示。对于任何横跨数个LSB的交流信号, 其量化误差可以通过一个峰峰值幅度为q (一个LSB的权重)的非相关锯齿波形来近似计算。对该近似法还可以从另一个角度来看待, 即实际量化误差发生在 $\pm\frac{1}{2}$ q范围内任意一点的概率相等。虽然这种分析不是百分之百精确, 但对大多数应用是足够准确的。

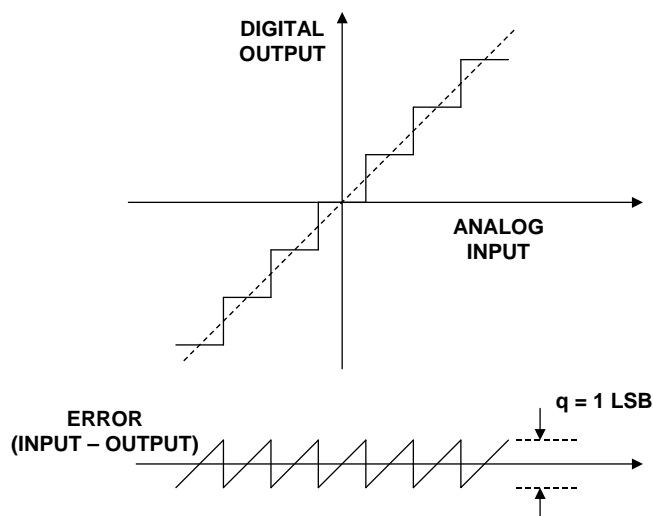


图1: 理想N位ADC的量化噪声

贝尔实验室的W. R. Bennett 1948年发表的经典论文(参考文献1)中, 分析了量化噪声的实际频谱。采用上述简化假设, 他的详细数学分析可以简化为图1所示。继Bennett的经典论文之后, 还有其它一些关于转换器噪声的重要论文和著作(参考文献2-6)。

图2更详细地显示了量化误差与时间的关系。同样, 一个简单的锯齿波形就能提供足够准确的分析模型。锯齿误差的计算公式如下:

$$e(t) = st, -q/2s < t < +q/2s. \quad \text{等式1}$$

$e(t)$ 的均方值可以表示为:

$$\overline{e^2(t)} = \frac{s}{q} \int_{-q/2s}^{+q/2s} (st)^2 dt. \quad \text{等式2}$$

进行简单的积分和简化可得:

$$\overline{e^2(t)} = \frac{q^2}{12}. \quad \text{等式3}$$

因此, 均方根量化误差为:

$$\text{均方根量化噪声} = \sqrt{\overline{e^2(t)}} = \frac{q}{\sqrt{12}}. \quad \text{等式4}$$

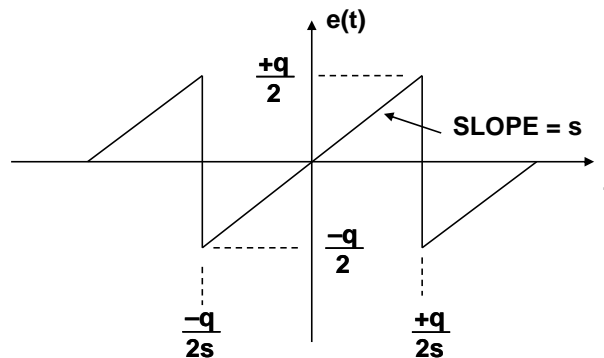


图2: 量化噪声与时间的关系

锯齿误差波形产生的谐波远远超过DC至 $f_s/2$ 的奈奎斯特带宽, 然而, 所有这些高阶谐波必须折回(混叠)到奈奎斯特带宽并相加, 产生 $q/\sqrt{12}$ 的均方根噪声。

正如Bennett所指出的(参考文献1), 量化噪声近似于高斯分布, 几乎均匀地分布于从DC至 $f_s/2$ 的奈奎斯特带宽。这里假设量化噪声与输入信号不相关。在某些条件下, 当采样时钟

和信号通过谐波相关时，量化噪声将与输入信号相关，能量集中在信号的谐波中，但均方根值仍然约为 $q/\sqrt{12}$ 。理论信噪比现在可以通过一个满量程输入正弦波来计算：

$$\text{满量程输入正弦波 } = v(t) = \frac{q2^N}{2} \sin(2\pi ft). \quad \text{等式5}$$

因此，输入信号的均方根值为：

$$\text{满量程输入的均方根值} = \frac{q2^N}{2\sqrt{2}}. \quad \text{等式6}$$

因此，理想N位转换器的均方根信噪比为：

$$\text{SNR} = 20 \log_{10} \frac{\text{rms value of FS input}}{\text{rms value of quantization noise}} \quad \text{等式7}$$

$$\text{SNR} = 20 \log_{10} \left[\frac{q2^N/2 \cdot \sqrt{2}}{q/\sqrt{12}} \right] = 20 \log_{10} 2^N + 20 \log_{10} \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{等式8}$$

$$\text{SNR} = 6.02N + 1.76\text{dB}, \quad \text{DC至} f_s/2 \text{带宽范围} \quad \text{等式9}$$

Bennett论文说明：虽然量化噪声的实际频谱相当复杂，难以分析，但推导出等式9的简化分析对大多数应用足够准确。然而，必须再次强调，均方根量化噪声是在DC至 $f_s/2$ 的完整奈奎斯特带宽范围内进行测量。

量化噪声模型

许多应用中，实际目标信号占用的带宽BW小于奈奎斯特带宽(参见图3)。如果使用数字滤波来滤除带宽BW以外的噪声成分，则等式中必须包括一个校正系数(称为“处理增益”)，以反映SNR的最终提高，如等式10所示。

$$\text{SNR} = 6.02N + 1.76 \text{ dB} + 10 \log_{10} \frac{f_s}{2 \cdot \text{BW}}, \quad \text{带宽BW范围.} \quad \text{等式10}$$

以两倍以上信号带宽的速率对信号进行采样的过程称为“过采样”。过采样、量化噪声整形和数字滤波均是 Σ - Δ 型转换器的重要概念，不过任何ADC架构都可以采用过采样技术。

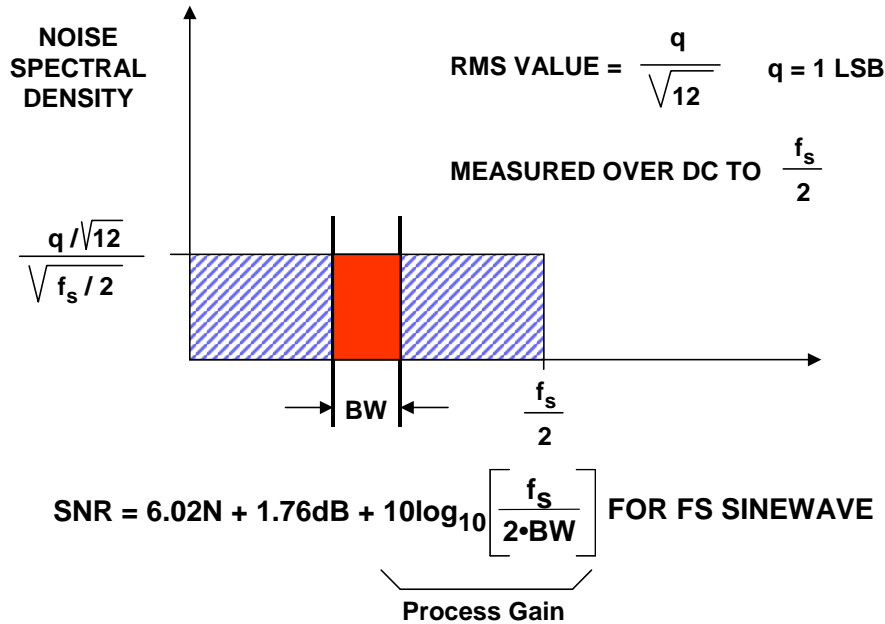


图3: 显示处理增益的量化噪声频谱

处理增益的意义可以通过下例说明。在许多数字基站或其它宽带接收机中，信号带宽由许多独立的通道组成，一个ADC对整个带宽进行数字化处理。例如，美国的模拟蜂窝无线电系统(AMPS)由416个30 kHz带宽通道组成，占用的带宽约为12.5 MHz。假设采样速率为65 MSPS，并且使用数字滤波来分离各个30 kHz通道。在这些条件下，过采样导致的处理增益为：

$$\text{处理增益} = 10\log_{10} \frac{f_s}{2 \cdot BW} = 10\log_{10} \frac{65 \times 10^6}{2 \times 30 \times 10^3} = 30.3\text{ dB.} \quad \text{等式11}$$

将处理增益加入ADC SNR规格，便得到30 kHz带宽内的SNR。上例中，如果ADC SNR规格为65 dB(DC至 $f_s/2$)，则30 kHz通道带宽内的SNR提高到95.3 dB(经过适当的数字滤波后)。

图4显示了一个结合过采样和欠采样的应用。目标信号的带宽为BW，以载波频率 f_c 为中心。采样频率可以远低于 f_c ，所选的采样频率使得目标信号位于其奈奎斯特区的中心。通过模拟和数字滤波消除目标信号带宽以外的噪声，从而获得等式10所示的处理增益。

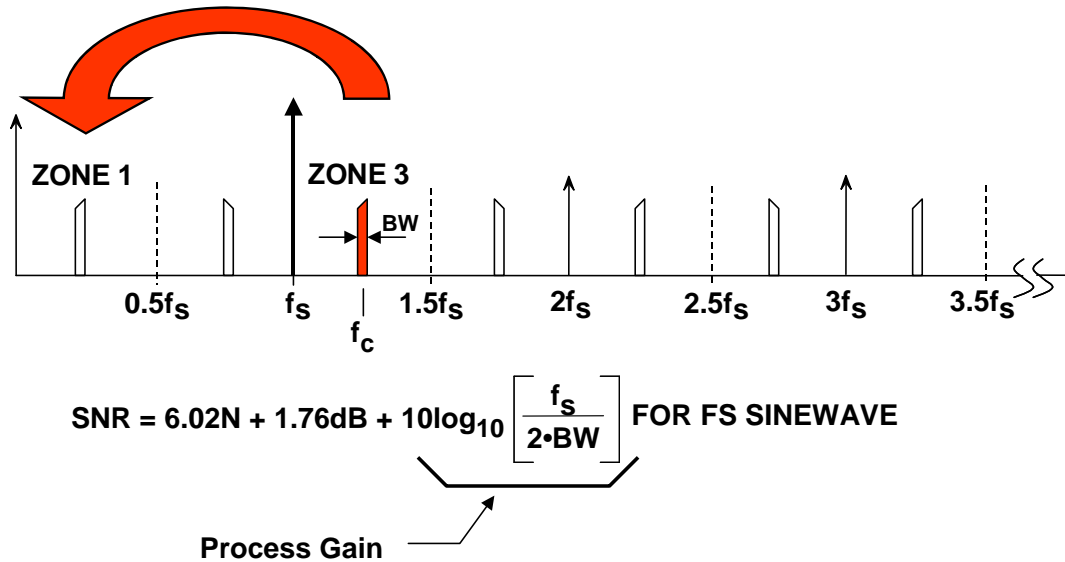


图4：欠采样和过采样结合所产生的处理增益

量化噪声与输入信号之间的相关性容易令人误解

虽然噪声的均方根值可通过 $q/\sqrt{12}$ 计算精确近似值，但在某些条件下，频域成分可能与交流输入信号高度相关。例如，低幅度周期性信号的相关度大于高幅度随机信号的相关度。通常假设理论量化噪声表现为白噪声，均匀地分布在DC至 $f_s/2$ 的奈奎斯特带宽范围。但是，事实并非全然如此。在强相关的情况下，量化噪声集中在输入信号的各次谐波上，这正是我们不希望看到的。

在多数实际应用中，ADC的输入是一段频率(总是会与一些不可避免的系统噪声相加)，因此量化噪声往往是随机的。然而，在频谱分析应用中(或者使用频谱纯净的正弦波作为输入对ADC执行FFT)，量化噪声与信号的相关度取决于采样频率与输入信号的比值。

图5的示例说明了这种情况，其中使用一个4096点FFT来分析一个理想12位ADC的输出。在左边的FFT图(A)中，采样频率(80.000 MSPS)与输入频率(2.000 MHz)的比值恰好选择为40，最差谐波比基波低大约77 dB。右图(B)显示了将输入频率略微偏移到2.111 MHz的效果，表现出随机性相对较高的噪声频谱，此时SFDR约为93 dBc，受FFT噪底尖峰限制。两种情况下，所有噪声成分的均方根值均近似于 $q/\sqrt{12}$ (理论SNR因此为74 dB)，但在第一种情况下，噪声因为相关性而集中在基波谐波上。

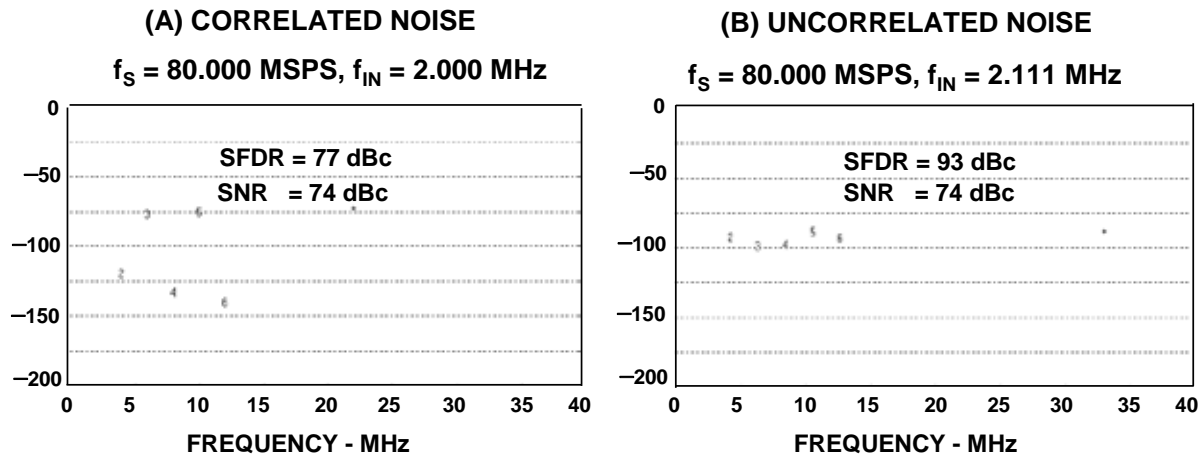


图5：采样时钟与输入频率的比值对理想12位ADC量化噪声频谱的影响，4096点FFT。
 (A) 相关噪声，(B) 非相关噪声

注意，从ADC看到的谐波失真的这种变化是采样过程的伪像，由量化误差与输入频率的相关性引起。在实际ADC应用中，量化误差一般表现为随机噪声，原因是宽带输入信号具有随机性，而且通常会有少量的系统噪声充当“扰动”信号，使量化误差频谱进一步随机化。

理解上述原理非常重要，因为ADC的单音正弦波FFT测试是公认的性能评估方法之一。为了精确测量ADC的谐波失真，必须采取措施确保测试设置能够真正测量ADC失真，而不是量化噪声相关性引起的伪像。因此，必须正确选择频率比，有时还要将少量噪声（扰动）与输入信号相加。利用模拟频谱分析仪测量DAC失真时，也应采取同样的防范措施。

SNR、处理增益和FFT噪底的关系

图6显示了一个理想12位ADC的FFT输出。注意，FFT噪底的平均值约为满量程以下107 dB，但12位ADC的理论SNR为74 dB。FFT噪底并非ADC的SNR，因为FFT像是一个带宽为 f_s/M 的模拟频谱分析仪，其中M为FFT中的点数。由于FFT的处理增益，理论FFT噪底因而比量化噪底低 $10\log_{10}(M/2)$ dB。

对于SNR为74 dB的理想12位ADC，4096点FFT将产生 $10\log_{10}(4096/2) = 33$ dB的处理增益，因此总FFT噪底为 $74 + 33 = 107$ dBc。事实上，FFT噪底可以通过提高FFT点数来进一步降低，就像模拟频谱分析仪的噪底可以通过缩小带宽来降低一样。因此，利用FFT测试ADC时，必须确保FFT足够大，使得失真能够与FFT噪底本身区别开。多次FFT的平均值无法进一步降低噪底，只能减小各个噪声谱成分幅度之间的差异。

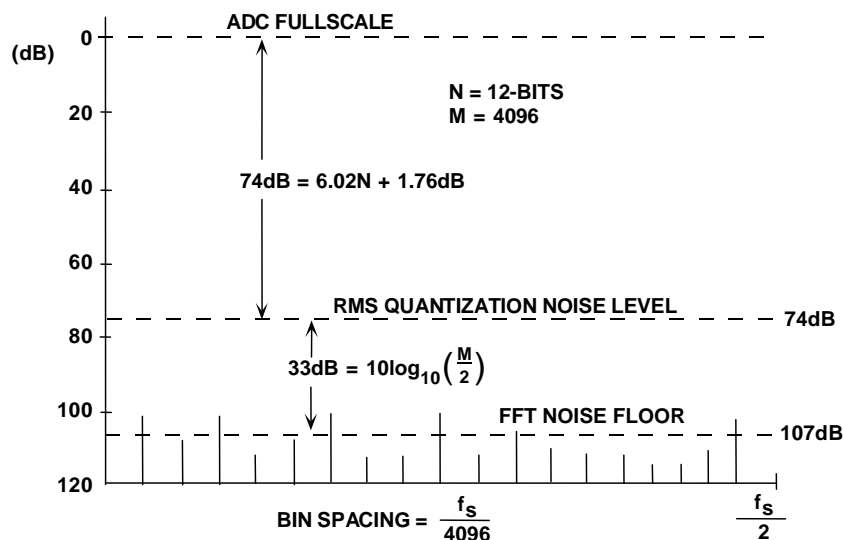


图6：理想12位ADC的噪底，使用4096点FFT

参考文献

1. W. R. Bennett, "Spectra of Quantized Signals," *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, July 1948, pp. 446-471.
2. B. M. Oliver, J. R. Pierce, and C. E. Shannon, "The Philosophy of PCM," *Proceedings IRE*, Vol. 36, November 1948, pp. 1324-1331.
3. W. R. Bennett, "Noise in PCM Systems," *Bell Labs Record*, Vol. 26, December 1948, pp. 495-499.
4. H. S. Black and J. O. Edson, "Pulse Code Modulation," *AIEE Transactions*, Vol. 66, 1947, pp. 895-899.
5. H. S. Black, "Pulse Code Modulation," *Bell Labs Record*, Vol. 25, July 1947, pp. 265-269.
6. K. W. Cattermole, *Principles of Pulse Code Modulation*, American Elsevier Publishing Company, Inc., 1969, New York NY, ISBN 444-19747-8.
7. Walt Kester, *Analog-Digital Conversion*, Analog Devices, 2004, ISBN 0-916550-27-3, Chapter 2. Also Available as *The Data Conversion Handbook*, Elsevier/Newnes, 2005, ISBN 0-7506-7841-0, Chapter 2.
8. Hank Zumbahlen, *Basic Linear Design*, Analog Devices, 2006, ISBN: 0-915550-28-1. Also available as *Linear Circuit Design Handbook*, Elsevier-Newnes, 2008, ISBN-10: 0750687037, ISBN-13: 978-0750687034. Chapter 5.

Copyright 2009, Analog Devices, Inc. All rights reserved. Analog Devices assumes no responsibility for customer product design or the use or application of customers' products or for any infringements of patents or rights of others which may result from Analog Devices assistance. All trademarks and logos are property of their respective holders. Information furnished by Analog Devices applications and development tools engineers is believed to be accurate and reliable, however no responsibility is assumed by Analog Devices regarding technical accuracy and topicality of the content provided in Analog Devices Tutorials.